解答速報

藤田医科大学（前期）　数学

2023年 1月　19日実施

問題 1

(1)　$U=\{x\,|\,x$ は 2 以上 28 以下の自然数 $\}$ を全体集合とする。U の部分集合
$A=\{x\,|\,x$ は偶数 $\}$, $B=\{x\,|\,x$ は 3 で割ると 1 余る $\}$,
$C=\{x\,|\,x$ と 2023 は 1 以外に正の公約数を持たない $\}$ について，次の集合の要素の個数を求めよ。ただし，$n(X)$ は集合 X の要素の個数を表す。
$n(A\cap B)=\boxed{\text{ア}}$, $n(\overline{A}\cap B)=\boxed{\text{イ}}$, $n(\overline{A}\cap\overline{B})=\boxed{\text{ウ}}$, $n(\overline{A\cup B})=\boxed{\text{エ}}$,
$n(A\cap B\cap C)=\boxed{\text{オ}}$, $n(A\cap B\cap\overline{C})=\boxed{\text{カ}}$, $n(\overline{A\cup B\cup C})=\boxed{\text{キ}}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\sqrt{x^2-5}\right)=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3)　曲線 $y=2x\sqrt{x}$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{5}{3}\right)$ の長さは $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(4)　$(1+i)^n=(1-i)^n$ をみたす 2023 以下の正の整数 n は $\boxed{\text{スセソ}}$ 個ある。ただし，i は虚数単位である。

(5)　関数 $f(x)=\log|\tan 4x|$ の $x=\dfrac{\pi}{48}$ における微分係数は $\boxed{\text{タチ}}$ である。

(6)　$\alpha=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ のとき，$\alpha^5-\alpha^4-12\alpha^3+12\alpha^2+16\alpha=\boxed{\text{ツテ}}$ である。

(7)　$f(x)=\dfrac{\sin^3 3x}{\sin^3 3x+\cos^3 3x}$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\boxed{\text{ト}}$ であるから，
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx=\frac{\pi}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

(8)　3 個のサイコロを同時に振るとき，出た目の和が 8 以下になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$，出た目の積が 12 以下になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ である。

(9)　x を実数とする。命題「$x^2-9x+20<0 \implies x^2-2(k-1)x+k^2-2k-8\leqq 0$」が真となる k の範囲は $\boxed{\text{ヘ}}\leqq k\leqq\boxed{\text{ホ}}$ である。

(10)　数列 $\{a_k\}$ が $k\geqq 1$ で $a_k>0$，a_k の第 1 項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{n^3}{a_n}\right)$ であるとき，
$S_5=\boxed{\text{マミ}}$，　$S_{20}=\boxed{\text{ムメモ}}$ である。

解答

解答記号	正解
ア	5
イ	4
ウ	9
エ	9
オ	4
カ	1
キ	2
$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{5}{2}$
$\dfrac{\text{コサ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{14}{3}$
スセソ	505

解答記号	正解
タチ	16
ツテ	16
ト	0
$\dfrac{\pi}{\text{ナニ}}$	$\dfrac{\pi}{12}$
$\dfrac{\text{ヌ}}{\text{ネノ}}$	$\dfrac{7}{27}$
$\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒフ}}$	$\dfrac{7}{27}$
ヘ $\leqq k \leqq$ ホ	$3 \leqq k \leqq 8$
マミ	15
ムメモ	210

解説

(1)

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28\}$$
$$B = \{4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,\ 28\}$$

である．これより

$$A \cap B = \{4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28\} \qquad n(A \cap B) = \mathbf{5}$$
$$\overline{A} \cap B = \{7,\ 13,\ 19,\ 25\} \qquad n(\overline{A} \cap B) = \mathbf{4}$$
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 15,\ 17,\ 21,\ 23,\ 27\} \qquad n(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{9}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ なので} \qquad n(\overline{A \cup B}) = \mathbf{9}$$

$2023 = 7 \cdot 17^2$ なので $\overline{C} = \{7,\ 14,\ 17,\ 21,\ 28\}$ である．（これら以外の数は C の要素）

$$A \cap B \cap C = \{4,\ 10,\ 16,\ 22\} \qquad n(A \cap B \cap C) = \mathbf{4}$$
$$A \cap B \cap \overline{C} = \{28\} \qquad n(A \cap B \cap \overline{C}) = \mathbf{1}$$
$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{17,\ 21\} \qquad n(\overline{A \cup B \cup C}) = \mathbf{2}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x\sqrt{x^2-5}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x-\sqrt{x^2-5}\right)\left(x+\sqrt{x^2-5}\right)}{x+\sqrt{x^2-5}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left\{x^2-(x^2-5)\right\}}{x+\sqrt{x^2-5}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x+\sqrt{x^2-5}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5}{1+\sqrt{1-\dfrac{5}{x^2}}} \\
&= \mathbf{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

(3)　$y=2x\sqrt{x}=2x^{\frac{3}{2}}$，$y'=3x^{\frac{1}{2}}$ なので，求める長さを l とすると

$$\begin{aligned}l&=\int_0^{\frac{5}{3}}\sqrt{1+\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx\\&=\int_0^{\frac{5}{3}}\sqrt{1+9x}dx\\&=\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{5}{3}}\\&=\boldsymbol{\frac{14}{3}}\end{aligned}$$

(4)　$(1+i)^n=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ であり，

$$\begin{aligned}(1-i)^n&=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}^n\\&=(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right)\\&=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

である．したがって

$$(1+i)^n=(1-i)^n \iff (1+i)^n-(1-i)^n=0 \iff 2(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=0$$

から $\dfrac{n\pi}{4}=k\pi \iff n=4k$（$k$ は自然数）を得る．$1\leqq n\leqq 2023 \iff 1\leqq k\leqq 505$ であるので，これを満たす正の整数 n は **505** 個ある．

別解

$(1+i)^n=(1-i)^n$ の両辺を $(1-i)^n$ で割ることにより，$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=1 \iff i^n=1$ となるので，$n=4k$（k は自然数）を得る．以下同様に **505** 個となる．

(5)

$$f'(x)=\frac{1}{\tan 4x}\cdot\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4=\frac{4}{\sin 4x\cos 4x}=\frac{8}{\sin 8x}$$

であるので，$x=\dfrac{\pi}{48}$ における微分係数は $f'\left(\dfrac{\pi}{48}\right)=\dfrac{8}{\sin\frac{\pi}{6}}=\mathbf{16}$ である．

(6)　$\alpha=\sqrt{5}+1$ であるので，$\sqrt{5}=\alpha-1$ である．これを 2 乗することにより

$$5=\alpha^2-2\alpha+1 \iff \alpha^2-2\alpha-4=0$$

を得る．

$$\alpha^5-\alpha^4-12\alpha^3+12\alpha^2+16\alpha=(\alpha^2-2\alpha-4)(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha+4)+16$$

であるから，求める値は **16** である．

(7)　$(\text{与式})=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx\cdots①$ となる．

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx$ について $\dfrac{\pi}{6}-x=t$ と置換すると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^0 f(t)(-1)dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)dt$$

となる．

したがって ① $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)dt = \mathbf{0}$ である．

$f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \dfrac{\sin^3 3\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{\sin^3 3\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos^3 3\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} = \dfrac{\cos^3 3x}{\cos^3 3x + \sin^3 3x}$ である．

$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx,\ B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)dx$ とすると，① より $A - B = 0 \iff A = B \cdots$ ②．

また，$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin^3 3x + \cos^3 3x}{\sin^3 3x + \cos^3 3x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\pi}{6} \cdots$ ③．

②, ③ より $A = \dfrac{\pi}{\mathbf{12}}$ である．

(8) 3 個のサイコロの目を $a,\ b,\ c$ とする．$d \geqq 1$ なる自然数 d を用いると，「$a+b+c \leqq 8$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組の個数」と「$a+b+c+d = 9$ を満たす $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組の個数」は等しい（ただし $a,\ b,\ c$ が 1 以上 6 以下であるため，この考え方は $a+b+c \geqq 9$ のときは使えない）．この $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組の個数は，9 個の〇を一列に並べたすき間に 3 本の仕切りを割り込ませる場合の数と一致するから，出た目の和が 8 以下になる確率は，$\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3}{6^3} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{27}}$．

また，出た目の積が 12 以下になる確率は，下の表から，$\dfrac{56}{6^3} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{27}}$．

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

表の内部は積 ab の値

c	ab の条件	(a,b) の組の個数
1	$ab \leqq 12$	23
2	$ab \leqq 6$	14
3	$ab \leqq 4$	8
4	$ab \leqq 3$	5
5	$ab \leqq 2.4$	3
6	$ab \leqq 2$	3
		計 56

(9) $x^2 - 9x + 20 < 0 \iff (x-4)(x-5) < 0 \iff 4 < x < 5 \cdots$ ①．

$x^2 - 2(k-1)x + k^2 - 2k - 8 \leqq 0 \iff (x-k+4)(x-k-2) \leqq 0 \iff k-4 \leqq x \leqq k+2 \cdots$ ②．

よって ① $\Rightarrow$ ② が真となる条件は，$k-4 \leqq 4$ かつ $5 \leqq k+2$ より，$\mathbf{3 \leqq k \leqq 8}$．

(10) 与式より $S_1 = a_1 = \dfrac{1}{2}\left(a_1 + \dfrac{1}{a_1}\right)$．整理すると

$$a_1{}^2 - 1 = 0 \iff (a_1 - 1)(a_1 + 1) = 0$$

ここで与条件より $a_1 > 0$ なので，$a_1 = 1$．

与式より $S_2 = a_1 + a_2 = \dfrac{1}{2}\left(a_2 + \dfrac{8}{a_2}\right)$．$a_1 = 1$ を代入して整理すると

$$a_2{}^2 + 2a_2 - 8 = 0 \iff (a_2 - 2)(a_2 + 4) = 0$$

ここで与条件より $a_2 > 0$ なので，$a_2 = 2$．

与式より $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{1}{2}\left(a_3 + \dfrac{27}{a_3}\right)$．$a_1 = 1,\ a_2 = 2$ を代入して整理すると

$$a_3{}^2 + 6a_3 - 27 = 0 \iff (a_3 - 3)(a_3 + 9) = 0$$

ここで与条件より $a_3 > 0$ なので，$a_3 = 3$．

ここまでから $a_n = n$ と推測する．これを数学的帰納法で示す（本番の試験中ではそこまでする時間の余裕はないだろう）．

(i) $n = 1$ のとき $a_1 = 1$ なので成り立つ．

(ii)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ のとき $a_n = n$ が成り立つと仮定する．このとき $S_k = \dfrac{1}{2}k(k+1)$ である．

与式から $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_{k+1} + \dfrac{(k+1)^3}{a_{k+1}}\right)$．$S_k = \dfrac{1}{2}k(k+1)$ を代入して整理すると

$$a_{k+1}{}^2 + k(k+1)a_{k+1} - (k+1)^3 = 0 \iff \{a_{k+1} - (k+1)\}\{a_{k+1} + (k+1)^2\} = 0$$

ここで与条件より $a_{k+1} > 0$ なので，$a_{k+1} = k+1$．したがって $n = k+1$ のときも成り立つ．

以上から $a_n = n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから，$S_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ である．したがって，$S_5 = \mathbf{15}$，$S_{20} = \mathbf{210}$ である．

問題 2

実数 x の区間 $a \leqq x \leqq b$（ただし $0 < a < b$）で正の値をとる微分可能な関数 $f(x)$ に対して，微分可能な逆関数 $g(x)$ が存在するとき，定積分 S_1，S_2 を次式で定義する。

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$S_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$$

次の問いに答えよ。

(1)　$S_1 + S_2$ を a，b，$f(a)$，$f(b)$ で表せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x}-1}dx$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x}-1}dx$ を求めよ。

解答

(1)　$x = g(y)$ とおくと，$y = f(x)$ であり，$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ であるので，

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy \\ &= \int_a^b x\frac{dy}{dx}\,dx \\ &= \int_a^b xf'(x)\,dx \\ &= \Big[xf(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx \\ &= bf(b) - af(a) - S_1 \end{aligned}$$

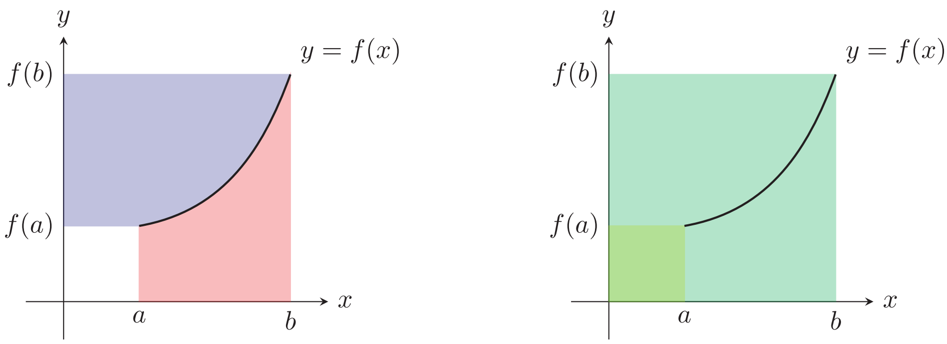
したがって，

$$S_1 + S_2 = \boldsymbol{bf(b) - af(a)}$$

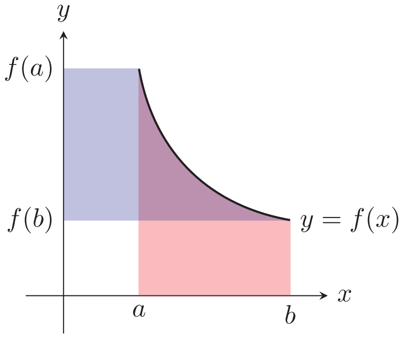
である．

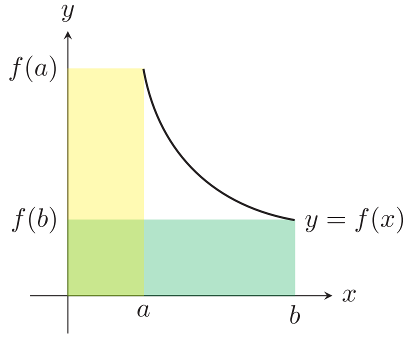
注釈

$f(x)$ は連続で逆関数を持つので，単調増加または単調減少である．



$f(x)$ が単調増加の場合，上左図において の部分の面積は S_1， の部分の面積は S_2 なので，$S_1 + S_2$ は，上右図において の長方形の面積の面積から の長方形を引いたものである．





$f(x)$ が単調減少の場合，上左図において ■ の部分の面積は S_1，■ の部分の面積は $-S_2$ なので，S_1+S_2 は，■ の部分の面積から ■ の部分の面積を引いたもの，すなわち上右図において ■ の長方形の面積から ■ の長方形の面積を引いたものである．

以上より，$S_1+S_2=bf(b)-af(a)$ であることが確認できる．

(2)　$y=\sqrt{\sqrt{1+x}-1}$ とおくと，$y^2=\sqrt{1+x}-1$ より $(y^2+1)^2=1+x$ から $x=y^4+2y^2$ となるので，

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{1+x}-1}$$

とおくと，

$$f^{-1}(x)=x^4+2x^2$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}\int_{f(3)}^{f(99)} f^{-1}(x)\,dx &= \int_1^3 (x^4+2x^2)\,dx\\ &= \left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}\right]_1^3\\ &= \frac{986}{15}\end{aligned}$$

となるので，(1) より，

$$\begin{aligned}\int_3^{99} f(x)\,dx &= 99f(99)-3f(3)-\int_{f(3)}^{f(99)} f^{-1}(x)\,dx\\ &= 99\cdot 3-3\cdot 1-\frac{986}{15}\\ &= \boldsymbol{\frac{3424}{15}}\end{aligned}$$

となる．

別解

$t=\sqrt{\sqrt{1+x}-1}$ と置換すると，$(t^2+1)^2=1+x$ より，$2(t^2+1)\cdot 2t\,dt=dx$ である．よって，

$$\begin{aligned}\int_3^{99}\sqrt{\sqrt{1+x}-1}\,dx &= \int_1^3 t\cdot 2(t^2+1)\cdot 2t\,dt\\ &= \int_1^3 4(t^4+t^2)\,dt\\ &= 4\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_1^3\\ &= 4\left\{\left(\frac{243}{5}+9\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3424}{15}}$$

(3)　$y = \sqrt{\dfrac{4}{x} - 1}$ とおくと，$y^2 = \dfrac{4}{x} - 1$ より $x = \dfrac{4}{y^2+1}$ となるので，

$$f(x) = \sqrt{\frac{4}{x} - 1}$$

とおくと，

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{x^2+1}$$

である．ここで，

$$\int_{f(1)}^{f(3)} f^{-1}(x)\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{x^2+1}\,dx$$

$$\left(x = \tan\theta \text{とおくと } dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{\tan^2\theta + 1} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \Big[4\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{2}{3}\pi$$

となるので，(1) より，

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 3f(3) - 1f(1) - \int_{f(1)}^{f(3)} f^{-1}(x)\,dx$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \cdot \sqrt{3} - \left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$

となる．

$\boxed{\text{別解}}$

$x = 4\cos^2\theta\ \left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換すると，$dx = -8\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ より，

$$\int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x} - 1}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1} \cdot (-8)\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= -8\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\tan^2\theta}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= -8\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= -4\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= -4\left\{\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$

問題 3

xy 平面上の点 $(p,\ q)$ について，$p,\ q$ がともに整数のときこの点を格子点と呼ぶ。また e を自然対数の底とするとき，$p-e$ または $p+e$ のどちらかと，$q+\dfrac{1}{2}$ がともに整数のとき，この点を e 点と呼ぶことにする。例えば，$(p,\ q)=\left(1-e,\ \dfrac{3}{2}\right)$ は e 点である。

次の問いに答えよ。ただし，素数の平方根と e が無理数であり，$2.7<e<2.8$ であることは証明なしに用いてよい。

(1) 2 つの格子点を結ぶ任意の線分は e 点を通らないことを示せ。

(2) 4 つの格子点を頂点とし，1 辺の長さが 1 の任意の正方形の内部にある e 点の個数を求めよ。

(3) 3 つの格子点を頂点とし，1 辺が x 軸に平行，1 辺が y 軸に平行な任意の直角三角形の面積は，この三角形の内部にある e 点の個数の $\dfrac{1}{2}$ に等しいことを示せ。

(4) 3 つの格子点を頂点とする任意の三角形の面積は，この三角形の内部にある e 点の個数の $\dfrac{1}{2}$ に等しいことを示せ。

(5) 3 つの格子点を頂点とする正三角形は存在しないことを示せ。

解答

(1) 定義により e 点の x 座標は無理数，y 座標は整数ではない有理数である．2 つの格子点を結ぶ線分が y 軸に平行のとき，その線分上の点の x 座標は整数であるから，e 点にはなりえない．次に，2 つの格子点を結ぶ線分が y 軸に平行でないとき，その線分の傾きは有理数である．e 点がその線分上にあるとし，その線分の端点の一方の座標を $\mathrm{A}(m,\ n)$ ($m,\ n$ は整数)，e 点の座標が $\mathrm{B}(p,\ q)$ であるとすると，線分 AB の傾きは $\dfrac{q-n}{p-m}$ となるが，$p-m$ は 0 でなく無理数であり $q-n$ は 0 でない有理数であるからこの傾きは無理数となり矛盾する．したがって，2 つの格子点を結ぶ任意の線分は e 点を通らない．（証明終）

(2) $m,\ n$ を整数として，4 つの格子点 $(m,\ n)$, $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m+1,\ n+1)$ 内にある e 点は $\left(m+3-e,\ n+\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(m-2+e,\ n+\dfrac{1}{2}\right)$ の **2 個** である．

(3) 3 つの格子点を頂点とする直角三角形の直角をなす隣り合う 2 辺の長さを $s,\ t$ ($s,\ t$ は自然数) とする．この 2 辺を隣り合う 2 辺とする長方形の内部には，4 つの格子点を頂点とし 1 辺の長さが 1 の正方形が st 個あるので e 点の個数は (2) により $2st$ 個である．また，直角三角形の斜辺上には (1) により e 点は存在しない．したがって，直角三角形の内部にある e 点の個数は長方形の内部にある e 点の個数の半分であるから st 個である．一方この直角三角形の面積は $\dfrac{1}{2}st$ であるから，題意は示された．（証明終）

(4) 4 つの格子点を頂点とする平行四辺形を考えたとき，平行四辺形の対角線上には (1) により e 点は存在しないので，

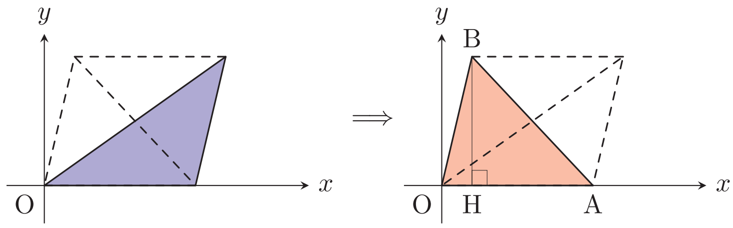
4 頂点のうちどの 3 点をとって三角形を作っても，それらの面積はすべて同じであり，かつ
その内部にある e 点の個数はいずれも平行四辺形の内部にある e 点の個数の半分である $\cdots$①

ことに注意しておく．三角形のどれか 1 つの頂点を原点としても一般性を失わないので，以下では 3 頂点のうちの 1 つは原点であるとする．

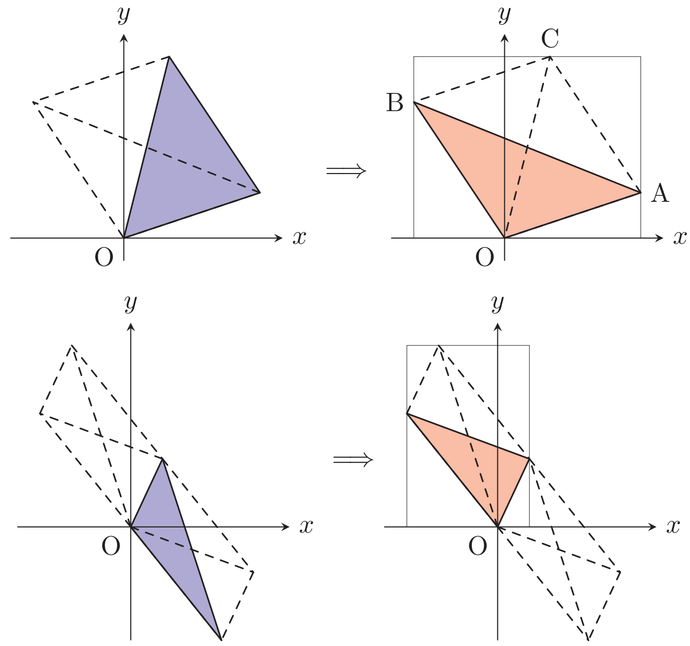
(i) 1 つの辺が x 軸に平行のとき（y 軸に平行のときも同様），3 頂点の座標を $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,0)$, $\mathrm{B}(b,c)$ とする．ここで①により $b<a$ としてもよい（下図の右を参照）．このとき，B から x 軸に垂線を下ろし x 軸との交点を H とすると，

$$
\begin{aligned}
(\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積}) &= (\triangle\mathrm{OBH}\text{ の面積}) + (\triangle\mathrm{ABH}\text{ の面積}) \\
&= \frac{1}{2}(\triangle\mathrm{OBH}\text{ 内にある } e \text{ 点の個数}) + \frac{1}{2}(\triangle\mathrm{ABH}\text{ 内にある } e \text{ 点の個数}) \quad (\because (3)) \\
&= \frac{1}{2}(\triangle\mathrm{OAB}\text{ 内にある } e \text{ 点の個数})
\end{aligned}
$$

であるから題意は成立する．



(ii)　どの辺も両座標軸に平行ではないとき，①より適当な変形を加えることにより原点以外の 2 頂点について，その x 座標がそれぞれ正と負であり，y 座標がともに正であるような，もとの三角形の面積と同じ面積をもちかつその内部にある e 点の個数が同じ三角形を作ることができる．



その 2 頂点の座標を $\mathrm{A}(a,\ b),\ \mathrm{B}(c,\ d)$ $(a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0)$ とし，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定まる点とすると，平行四辺形 OACB に外接し各辺が両座標軸に平行な長方形を作ることができる．この長方形の内部にある e 点の個数は $2(a-c)(b+d)$ 個である．また，長方形の内部にあって平行四辺形の外部にある e 点の個数は 4 つの直角三角形の内部にある e 点の個数であることから $2ab-2cd$ 個である．以上により $\triangle\mathrm{OAB}$ の内部にある e 点の個数は

$$\frac{1}{2}\left\{2(a-c)(b+d)-(2ab-2cd)\right\}=ad-bc$$

個である．一方でこの三角形の面積は $\dfrac{1}{2}(ad-bc)$ であるから題意は示された．　（証明終）

(5)　正三角形の 1 辺の長さを l とすると，正三角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}l^2$ である．正三角形の 3 頂点がすべて格子点であるとすると，(4) より内部にある e 点の個数は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}l^2$ となるが，l^2 は 0 でない整数であることから $\dfrac{\sqrt{3}}{2}l^2$ は無理数となり矛盾．したがって，3 つの格子点を頂点とする正三角形は存在しない．　（証明終）

講評

問題 1［小問集合］

((1) やや易 (2) 易 (3) 易 (4) やや易 (5) やや易 (6) やや易 (7) やや難 (8) やや易 (9) 易 (10) やや難)

(7), (10) は経験と発想力が必要だが，それ以外は難しくはない．とは言え部分点はないので，かなり慎重に処理していく必要がある．

(7) は $f(x)$ と $f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ が等しいことを導きたいが，同種の問題を解いた経験がないと厳しいだろう．(10) は，一般項 a_n を求めようとせずに，a_1，a_2，$\cdots$ を順次求めるという発想ができたかが鍵となる．

問題 2［定積分の値の逆関数との関係］（標準〜やや難）

(1) で，ある関数の定積分値とその逆関数の定積分値の関係式を求めさせ，それを使って (2), (3) で実際に積分計算をさせるという流れの出題である．逆関数の扱いが若干抽象的なので，(1) で何をしてよいのか戸惑った受験生もいただろう．しかし，図を描いて考えると非常に明らかな関係があることに気づくはずである．

(2), (3) はそれを利用することになるのだが，(1) ができなかったとしてもそれぞれ単独の定積分の問題としても解くことが可能なので，決してあきらめずに取り組むべきである．ただし (3) の置換積分に気づくのは少し難しいかもしれない．

問題 3［格子点を結んでできる三角形の内部に存在する e 点の個数］（やや難〜難）

格子点と e 点に関する問題だった．格子点の対策はしていた受験生が多いだろうが e 点はほとんど初見だったのではないだろうか．落ち着いて状況を把握できたかが問われた．証明問題が 5 問中 4 問と多かったが，分からない問題であっても前問の証明の結果を用いてとれるところはとりたい．例えば，(4) は難しいが (5) はその結果を用いれば証明は簡単にできる．

2022 年度前期と比べると，問題 1 はやや易化，問題 2，問題 3 はトータルすると例年並だが，問題 3 は難しい．問題 1 はなるべく正確に解ききりたい．その上で問題 2，問題 3 でどれだけ立ち回れたかの勝負となるが，あまり大きな差はつかない可能性が高い．1 次合格のための目標は 60%．