医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

藤田医科大学（後期）　数学

2023年3月2日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1)　整数全体を全体集合 U とし, U の部分集合 A, B を $\mathrm{A}=\{1,\ 4,\ a^3+33,\ a+6\}$, $\mathrm{B}=\{2,\ 7,\ a^3+30,\ a^2+a\}$ とする。$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=2$ であるとき $a=\boxed{アイ}$ であり, $n\left(\overline{\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{B}}}\right)=\boxed{ウ}$, $n\left((\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\right)=\boxed{エ}$ である。ただし，$n(\mathrm{X})$ は集合 X の要素の個数を表す。

(2)　三角形 ABC の辺 AB を $3:2$ に内分する点を P，辺 BC を $1:2$ に内分する点を Q，また AQ と CP の交点を R とするとき，$\dfrac{\triangle\mathrm{RBC}}{\triangle\mathrm{RAC}}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$\dfrac{\triangle\mathrm{RAC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。

(3)　5 個の値からなるデータ $3\cos a,\ 2\sin 2a,\ -2\sin 2a,\ 2\cos a,\ 0$ の分散の最小値は $\boxed{コ}$，最大値は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。ただし a は実数とする。

(4)　$z=\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ のとき $z^7=\boxed{ス}$，$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\boxed{セソ}$ であり，$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=\boxed{タ}$ である。ただし i は虚数単位とする。

(5)　$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$ のとき，$\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^2=\boxed{チツ}$ である。

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\log(4x+1)}{x^2}=\boxed{テ}$ である。

(7)　$f(x)=2x^4-4(1+a)x^3+12ax^2+16ax+5$ が極大値を持つような正の実数 a の範囲は $\boxed{ト}<a<\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$，$\boxed{ヌ}<a$ である。

(8)　medicine に使われている 6 種類 8 文字のうち 4 文字を使って作ることができる異なる文字列の数は $\boxed{ネノハ}$ である。

(9)　$2^{2023}\left(2^{2023}-1\right)$ の 1 の位の数字は $\boxed{ヒ}$ である。

(10)　$A=\left(16^{16}\right)^{16}$, $B=2^{\left(4^8\right)}$ とするとき, $\log_2(\log_2 A)-\log_2(\log_2 B)=\boxed{フヘ}$ である。

(11)　$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2dx=\frac{\boxed{ホ}}{\boxed{マミ}}\pi$ である。

解答

解答記号	正解
アイ	-3
ウ	2
エ	6
$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{2}{3}$
$\dfrac{\text{キ}}{\text{クケ}}$	$\dfrac{6}{13}$
コ	0
$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{5}{2}$
ス	1
セソ	-1

解答記号	正解
タ	7
チツ	45
テ	4
ト $< a < \dfrac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$, ヌ $< a$	$0 < a < \dfrac{1}{7}$, $4 < a$
ネノハ	606
ヒ	6
フヘ	-6
$\dfrac{\text{ホ}}{\text{マミ}}$	$\dfrac{1}{12}$

解説

(1)　集合 A, B の要素は整数であるから，a は整数である．$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=2$ であることから，集合 A と集合 B の要素で一致するものが 2 個だけあるための必要条件を考える．集合 A の要素について，1, 4 は集合 B のどの要素とも一致することはない．a^3+33 と一致する可能性がある集合 B の要素は a^2+a のみであり，このとき，

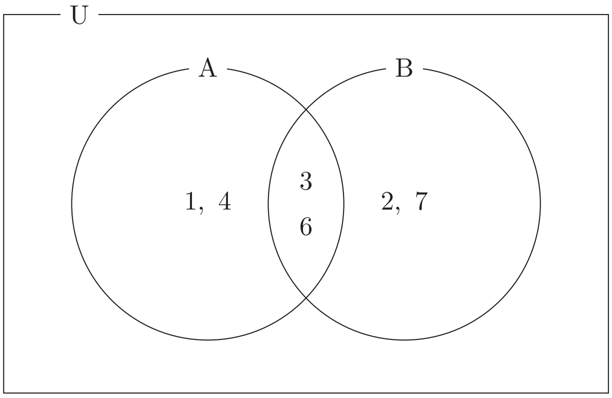
$$a^3+33=a^2+a \iff (a+3)(a^2-4a+11)=0$$

であるから，$a=-3$ であることが必要である．このとき，

$$\mathrm{A}=\{1,\ 4,\ 6,\ 3\},\ \mathrm{B}=\{2,\ 7,\ 3,\ 6\}$$

であるから，$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=2$ を満たす．ゆえに，$a=\mathbf{-3}$ である．

よって，ベン図は右のようになるので，



$$n\left(\overline{\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{B}}}\right)=n\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)=\mathbf{2}$$

であり，

$$(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$$

であるから，

$$n\left((\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\right)=\mathbf{6}$$

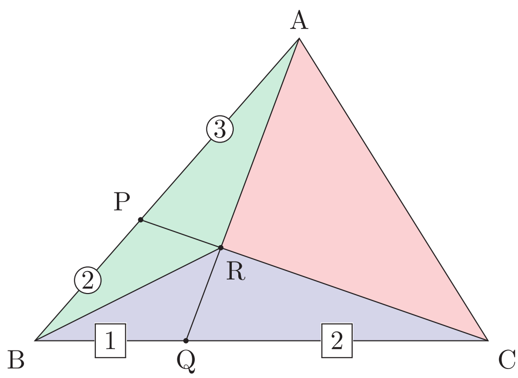
である．

(2)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=3:2$ より，$\triangle\mathrm{ARC}:\triangle\mathrm{BRC}=6:4$ である．また，$\mathrm{QC}:\mathrm{BQ}=2:1$ より，$\triangle\mathrm{ARC}:\triangle\mathrm{ARB}=6:3$ である．したがって，

$$\triangle\mathrm{ARB}:\triangle\mathrm{BRC}:\triangle\mathrm{ARC}=3:4:6$$

である．ゆえに，

$$\frac{\triangle\mathrm{RBC}}{\triangle\mathrm{RAC}}=\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}},\quad \frac{\triangle\mathrm{RAC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\mathbf{\frac{6}{13}}$$



(3)　5 個のデータの平均は

$$\frac{1}{5}(3\cos a + 2\sin 2a - 2\sin 2a + 2\cos a + 0) = \cos a$$

であるので，5 個のデータの分散を V とすると，

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{5}\left(9\cos^2 a + 4\sin^2 2a + 4\sin^2 2a + 4\cos^2 a + 0\right) - \cos^2 a \\ &= \frac{8}{5}(\sin^2 2a + \cos^2 a) \\ &= \frac{8}{5}(4\sin^2 a\cos^2 a + \cos^2 a) \\ &= \frac{8}{5}(-4\cos^4 a + 5\cos^2 a) \\ &= -\frac{32}{5}\left(\cos^2 a - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である．ここで，$0 \leqq \cos^2 a \leqq 1$ であることから V は $\cos^2 a = \dfrac{5}{8}$ のときに最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$，$\cos^2 a = 0$ のときに最小値 $\mathbf{0}$ をとる．

(4)　$z = \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ であるので，$z^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = \mathbf{1}$ である．$z \fallingdotseq 1$ なので等比数列の和の公式より

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z(1-z^6)}{1-z} = \frac{z-1}{1-z} = \mathbf{-1}$$

である．また，$1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^6$ は方程式 $x^7 = 1$ の異なる 7 つの解である．つまり

$$x^7 - 1 = (x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

と表すことができ，この式の両辺を $x-1$ で割ることにより，

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

を得る．この式に $x = 1$ を代入することにより，

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6) = 1+1+1+1+1+1+1 = \mathbf{7}$$

を得る．

(5)　$\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$ の両辺を 2 乗すると，

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 5 \iff x + \frac{1}{x} = 3$$

また，

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 3^2 - 4 = 5$$

であるので，

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 \cdot 5 = \mathbf{45}$$

(6)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1)\log(4x+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\log(4x+1)}{4x} \cdot 4$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 4$$
$$= \mathbf{4}$$

(7)　$f(x) = 2x^4 - 4(1+a)x^3 + 12ax^2 + 16ax + 5$ $(a > 0)$ は x^4 の係数が正の 4 次関数なので，$f(x)$ が極大値を持つ必要十分条件は $f'(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解を持つことである．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 - 12(1+a)x^2 + 24ax + 16a \\ &= 4\left\{2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax + 4a\right\} \end{aligned}$$

ここで $g(x) = 2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax + 4a$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^2 - 6(1+a)x + 6a \\ &= 6(x-1)(x-a) \end{aligned}$$

となる．$g(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解を持つためには $g(x)$ が極値を持つことが必要で，そのためには $g'(x) = 0$ が異なる 2 解を持つことが必要であるから $a \fallingdotseq 1$ である．

この条件下で，(極大値) $\times$ (極小値) < 0 となればよい．

$$\begin{aligned} (\text{極大値}) \times (\text{極小値}) &= g(a) \cdot g(1) \\ &= (-a^3 + 3a^2 + 4a)(7a - 1) \\ &= -a(a+1)(a-4)(7a-1) < 0 \cdots ① \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから

$$① \iff (a-4)(7a-1) > 0 \iff a < \frac{1}{7},\ 4 < a$$

これは $a \fallingdotseq 1$ を満たす．$a > 0$ と合わせて $\boldsymbol{0 < a < \frac{1}{7},\ 4 < a}$ となる．

(8)　medicine に使われている各文字の個数は e，i がそれぞれ 2 個， m，d，c，n がそれぞれ 1 個である．

① e，e，i，i の並べ方は $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ 通り．

② e，e と， i，m，d，c，n の 5 文字から選んだ 2 文字の計 4 文字の並べ方は ${}_5\mathrm{C}_2 \times \dfrac{4!}{2!} = 120$ 通り．

③ i，i と， e，m，d，c，n の 5 文字から選んだ 2 文字の計 4 文字の並べ方は ② と同様に考えて 120 通り．

④ e，i，m，d，c，n の 6 文字から 4 文字を選んで並べる並べ方は ${}_6\mathrm{P}_4 = 360$ 通り．

以上より $6 + 120 + 120 + 360 = \mathbf{606}$ 通り．

(9)　n を自然数とするとき，

$$2^{n+4} - 2^n = (2^4 - 1) \cdot 2^n = 15 \cdot 2^n = 10 \cdot 3 \cdot 2^{n-1}$$

となることから，10 を法とする合同式を考えると，$2^{n+4} - 2^n \equiv 0$ つまり $2^{n+4} \equiv 2^n$ が成り立つことがわかる．したがって 2^n の 1 の位の数は，$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のそれぞれでの 1 の位の数を 1 周期として周期的に変化することになるので，

$$2^{2023} \equiv 2^{4 \times 505 + 3} \equiv 2^3 \equiv 8$$

であることがわかる．よって

$$2^{2023}(2^{2023} - 1) \equiv 8(8-1) \equiv 56 \equiv 6$$

となり，求める 1 の位の数は $\mathbf{6}$ である．

(10)

$$\log_2 A = \log_2 (16^{16})^{16} = 16 \cdot \log_2 (16^{16}) = 16 \cdot 16 \cdot \log_2 16 = 16 \cdot 16 \cdot 4 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^2 = 2^{10}$$

$$\log_2 B = \log_2 2^{(4^8)} = 4^8 \cdot \log_2 2 = 4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$$

であるから，

$$\log_2(\log_2 A) - \log_2(\log_2 B) = \log_2\left(2^{10}\right) - \log_2\left(2^{16}\right) = 10 - 16 = \mathbf{-6}$$

となる．

(11)　$x = \tan\theta$ と置換する．$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，$\begin{array}{c|ccc} x & \frac{1}{\sqrt{3}} & \to & \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} & \to & \frac{\pi}{3} \end{array}$ なので

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\tan\theta}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\pi
\end{aligned}$$

的中!!

藤田医科大学後期直前授業 3/1（入試の前日）

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 3x}-1}{x\log(1+2x)}$ を求めよ．

問題２

O を原点とする xy 平面上に点 A$(2,\ 0)$，点 B$(1,\ \sqrt{3})$，および実数 $s,\ t$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定まる点 P がある。$s,\ t$ が (1)〜(3) のそれぞれの条件を満たす場合について，点 P がとりうる範囲を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

(1)　$2 \leqq s + 2t \leqq 6,\ 0 \leqq s,\ 0 \leqq t$

(2)　$1 \leqq |s| + |t| \leqq 6$

(3)　$s^2 + (s+t)^2 \leqq 6$

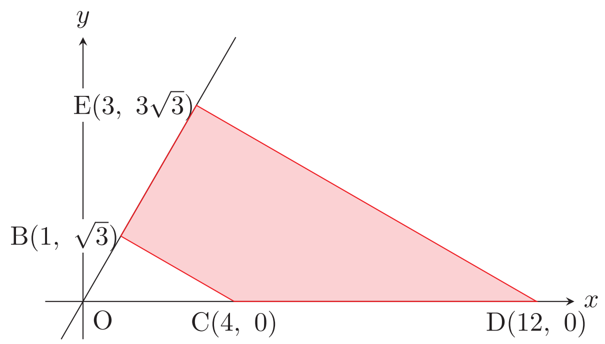
解答

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (4,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 6\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (12,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3,\ 3\sqrt{3})$$



とおくと，点 P がとりうる範囲は四角形 CDEB の周または内部であり，右図のようになる．△OCB と △ODE は相似で，相似比が $1:3$ となるので，四角形 CDEB の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot (3^2 - 1^2) = \boldsymbol{16\sqrt{3}}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = 6\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (6,\ 6\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-2,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-1,\ -\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (-12,\ 0)$$

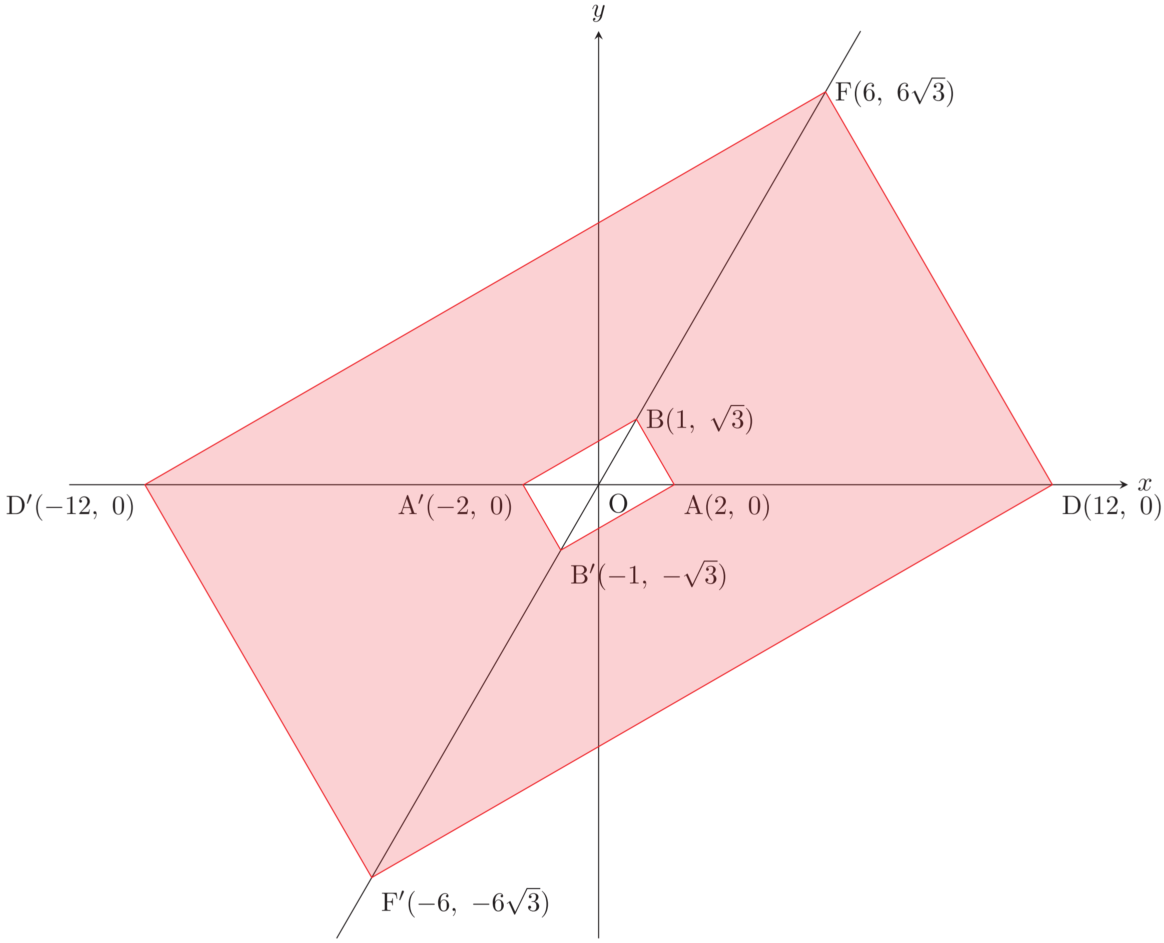
$$\overrightarrow{\mathrm{OF'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (-6,\ -6\sqrt{3})$$

とおくと，点 P がとりうる範囲は四角形 ABA′B′ の外側かつ四角形 DFD′F′ の内側であり，下図のようになる (ただし境界を含む)．△OAB と △ODF は相似で，相似比が $1:6$ となるので，四角形 ADFB の面積は，

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (6^2 - 1^2) = 35\sqrt{3}$$

である．したがって点 P がとりうる範囲の面積は，

$$35\sqrt{3} \cdot 4 = \boldsymbol{140\sqrt{3}}$$



(3) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

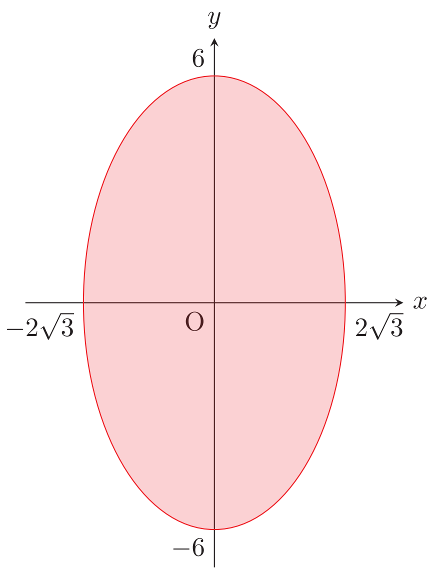
$$\begin{cases} x = 2s + t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$$

これを s, t について解くと，

$$\begin{cases} s = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}x - y) \\ t = \dfrac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

よって，

$$\begin{aligned} & s^2 + (s+t)^2 \leqq 6 \\ \iff\ & \frac{(\sqrt{3}x - y)^2}{12} + \frac{(\sqrt{3}x + y)^2}{12} \leqq 6 \\ \iff\ & \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{36} \leqq 1 \end{aligned}$$



より，点 P がとりうる範囲は右上図の楕円の周または内部である．
その面積は

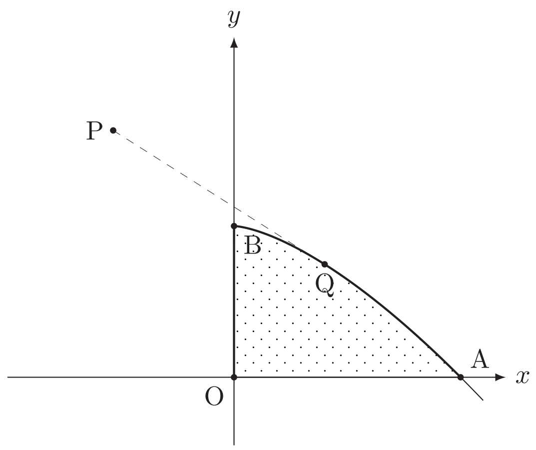
$$\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = \boldsymbol{12\sqrt{3}\pi}$$

問題３

O を原点とする xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{2}{3}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)$ $(x \geqq 0)$ 上に点 A$(1,\ 0)$，B$\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ をとり，伸び縮みしない糸を曲線 AB，線分 BO 上に緩まないように沿わせる。

この糸は，一端を点 A に固定して，曲線 AB に沿わせて点 B で折り，y 軸の下方向にまっすぐに沿わせると，ちょうど点 O に達する長さである。点 A に固定した糸の端とは反対側の端を点 P とする。

はじめ点 O に点 P があり，糸が緩まないように点 P を時計回りに動かしていくと，途中まで点 P は点 B を中心とし線分 OB の長さを半径とする円の周上にある。その後，糸は曲線 AB から徐々に離れはじめる。糸のうち曲線 AB 上の部分の点 P に近い側の点を点 Q とする。点 P は点 O から動き始めてから後，点 Q が点 A に達するまで動く。次の問いに答えよ。



(1)　糸の長さを求めよ。

(2)　点 Q の x 座標を t とする。$0<t<1$ のとき，点 P が曲線 AB の点 Q における接線上にあることに注意して，点 P の座標を t を用いて表せ。

(3)　点 O を起点とする点 P の軌跡を図示せよ。

(4)　糸が通過した部分の面積を求めよ。

解答

(1)　$y=\dfrac{2}{3}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{x}$ であるから，糸の長さは

$$
\begin{aligned}
(\text{線分 OB の長さ})+(\text{曲線 AB の長さ}) &= \frac{2}{3}+\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{2}{3}+\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx \\
&= \frac{2}{3}+\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}}
\end{aligned}
$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{x}$ であるから，点 Q における接線と平行な単位ベクトルのうち， x 成分が負であるものを $\overrightarrow{v}$ とすると，$\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}(-1,\ \sqrt{t})$ である．また，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PQ} &= \frac{2}{3}+\int_0^t \sqrt{1+x}\,dx \\
&= \frac{2}{3}+\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^t \\
&= \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

であるから，

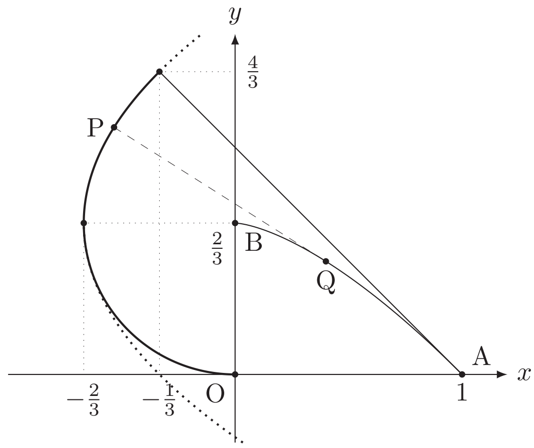
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\mathrm{PQ}\cdot\overrightarrow{v}
\end{aligned}
$$

$$= \left(t,\ \frac{2}{3}\left(1 - t^{\frac{3}{2}}\right)\right) + \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}}(-1,\ \sqrt{t})$$

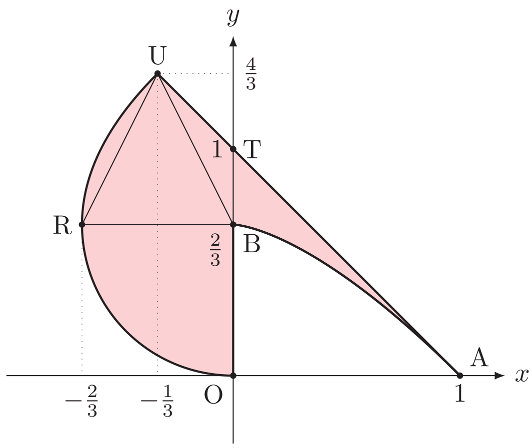
$$= \frac{1}{3}(t-2,\ 2\sqrt{t}+2)$$

より $\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}(t-2),\ \frac{2}{3}(\sqrt{t}+1)}\right)$ である（これは $t=0,\ 1$ のときも成り立つ）.

(3)　$x = \frac{1}{3}(t-2),\ y = \frac{2}{3}(\sqrt{t}+1)$ より t を消去すると $x = \frac{3}{4}y^2 - y - \frac{1}{3}$ となる．ここで，$0 \leqq t \leqq 1$ であることから $\frac{2}{3} \leqq y \leqq \frac{4}{3}$ であり，糸が曲線 AB から離れはじめるまでは点 P が点 B を中心とする半径 OB の円周上を動くことを考慮すると，点 P の軌跡は右図の太線部のようになる.



(4)　糸が通過した部分は下図の色付き部分である.



したがって，求める面積は

$$\left(\text{扇形 BORの面積}\right) + \left(\text{直線 URと放物線 } x = \frac{3}{4}y^2 - y - \frac{1}{3} \text{で囲まれた部分の面積}\right)$$

$$+ \left(\triangle\text{BURの面積}\right) + \left(\triangle\text{BTU の面積}\right)$$

$$+ \left(\triangle\text{OAT の面積}\right) - \left(0 \leqq x \leqq 1 \text{ において曲線 AB と } x \text{ 軸ではさまれた部分の面積}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\pi + \frac{\frac{3}{4}}{6}\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^3$$

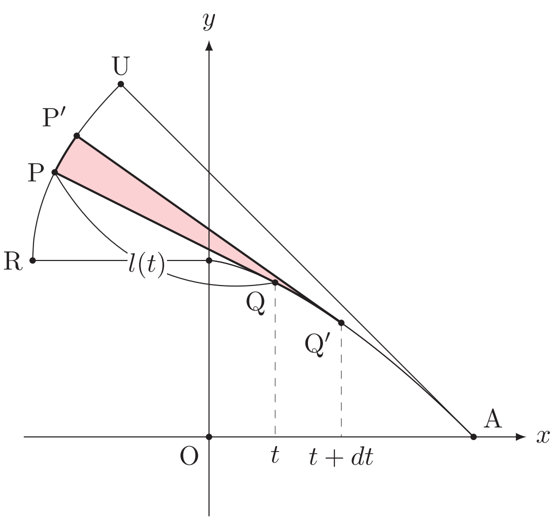
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 - \int_0^1 \frac{2}{3}\left(1 - x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{9} + \frac{1}{27} + \frac{2}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left[x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{9} + \frac{56}{135}}$$

別解



P が曲線 RU 上を動くときの線分 PQ の通過領域の面積 S については次のように考えて計算することも可能である．接点の x 座標が t である点 Q においては $\mathrm{PQ} = \dfrac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}(= l(t)$ とおく) であり，その傾きは $-\sqrt{t}$ であった．接点の x 座標が $t+dt$ である点を Q′ とする．Q が Q′ まで移動するときの線分 PQ の通過領域の微小面積 dS は

$$dS = \frac{1}{2}\{l(t)\}^2 d\theta$$

で与えられる．ただし $d\theta$ は傾き $-\sqrt{t}$ の直線 PQ と，傾き $-\sqrt{t+dt}$ の直線 P′Q′ のなす微小角を表す．
絶対値で考えて $\sqrt{t} = \tan\theta$ であるから

$$\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = (t+1)d\theta \iff d\theta = \frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)}dt$$

これより

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\{l(t)\}^2 d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{2}{9}(t+1)^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)}dt \\ &= \frac{1}{9}\int_0^1 \left(t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)dt \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{56}{135} \end{aligned}$$

となるので，求める面積は

$$(\text{扇形 BOR の面積}) + S = \boldsymbol{\frac{\pi}{9} + \frac{56}{135}}$$

である．

講評

問題 1［小問集合］
((1) やや難 (2) 易 (3) 標準 (4) やや難 (5) 易 (6) やや易 (7) やや難 (8) 標準 (9) やや易 (10) 易 (11) 標準)

平易な問題が多かった．それらをなるべく取りこぼしなく乗り切って，やや難度の高い (1),(4),(7) でどれだけ正解できたか，という勝負だろう．

(1) は，厳密な議論をしようとするとやや面倒だが，$n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 2$ となる a の値を見つけられれば，その後の設問は難しくないので差がつきそうである．

(4) は 1 の虚数 7 乗根についての典型処理であり，また (7) は，3 次関数 $f'(x)$ の極大値と極小値が異符号となる条件を考えればよいのだが，いずれも解いた経験がないと難しく感じただろう．

問題 2［平面ベクトル，いろいろな曲線］(やや易〜やや難)

ベクトルの係数についての条件から，点の存在領域とその面積を求める問題であった．(1), (2) は斜交座標などの考え方に慣れていれば難しくはない．(3) は少々難度が高い．s, t についての与条件を x 座標，y 座標についての条件に言い換えればよいが，それを発想できたかどうかで差がつくだろう．

問題 3［数学Ⅲの微積分］(標準〜やや難)

糸を曲線に沿わせた状態で緩めていったときの糸の端点の軌跡に関する問題であった．問題文が複雑で題意を汲み取りづらい部分があったかもしれないが，描かれている図を参考に状況を把握したい．(1) の糸の長さは計算も易しいため正解しておきたい．(2) の点 P の座標については誘導があったため，方針は立てられた受験生が多かったのではないだろうか．あとは正しく計算する必要があるが，詳解のような単位ベクトルの扱いや直線の傾きからシンプルに処理するテクニックなども身につけておくことができれば，よりスムーズに処理することができる．

2023 年度前期と同程度の難易度であった．立ち回り方としては，例年通り，問題 1 でなるべく高得点を確保し，その上で問題 2 と 3 に粘り強く取り組む，ということになる．1 次合格のための目標は 60%.