解答速報

関西医科大学（後期）　数学

2023年3月4日実施

I　青玉が 4 個，赤玉が 4 個，白玉が 1 個，黒玉が 1 個入っている袋がある。A さんは袋から玉を 1 つ無作為に取り出し，その玉の色をある装置に入力する。この装置は入力された色の情報を離れた場所の B さんに伝達する。この装置の内部では，下の表に示すように 4 つの色の情報をそれぞれコードと呼ばれる 0 か 1 で表された 2 桁の数値に変換して伝達している。装置がこのコードを伝達するときには，0 か 1 かのどちらかの数値を上位の桁から順に伝達するが，数値を 1 つ伝達するたびに一定の確率 (20%) で，0 を 1 や 1 を 0 のように間違って伝達してしまうとき，以下の確率を求めよ。

なお，各設問の答えは解答用紙の指定欄に百分率 (%)で表し，必要があれば小数第 1 位を四捨五入して答えよ。左の枠内には答えの導出課程を簡潔に記入すること。

色	コード
青	00
赤	01
白	10
黒	11

(1)　「青」と入力された色の情報が正しく「青」と伝達される確率
(2)　「赤」と入力された色の情報が間違って「白」と伝達される確率
(3)　B さんに伝達された色の情報が「黒」である確率
(4)　B さんに伝達された色の情報が「黒」であるときに，A さんが取り出したのが黒玉である条件付き確率

解答

(1)　「青」と入力された色の情報が正しく「青」と伝達されるのは，コードが 2 桁とも正しく伝達されるときなので，

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{25}=0.64=\mathbf{64\%}$$

(2)　「赤」と入力された色の情報が「白」と伝達されるのは，コードが 2 桁とも間違って伝達されるときなので，

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}=0.04=\mathbf{4\%}$$

(3)　色の情報が「黒」と伝達されるのは，以下の 4 パターンである．

(i)　青玉を取り出して，その情報が「黒」と伝達されるとき
コードが 2 桁とも間違って伝達されるときなので，

$$\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{250}$$

(ii)　赤玉を取り出して，その情報が「黒」と伝達されるとき
コードの上位の桁が間違って，下位の桁が正しく伝達されるときなので，

$$\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{250}$$

(iii)　白玉を取り出して，その情報が「黒」と伝達されるとき
コードの上位の桁が正しく，下位の桁が間違って伝達されるときなので，

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{250}$$

(iv)　黒玉を取り出して，その情報が正しく「黒」と伝達されるとき
コードが 2 桁とも正しく伝達されるときなので，

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{250}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{4+16+4+16}{250}=\frac{4}{25}=0.16=\mathbf{16\%}$$

(4)　(3) の結果より，

$$\frac{\frac{16}{250}}{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}=0.40=\mathbf{40\%}$$

II　2 つの関数を $f(x)=x^2(x+1)^2(x-1)^2$, $g(x)=x^2+1$ とおく。$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を Q，余りを R とするとき，以下の設問に答えよ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $y=f(x)$ の値域を求めよ。

(2)　Q と R を求めよ。

(3)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{R}{g(x)}dx$ を求めよ。

(4)　円周率が 3.2 より小さいことを証明せよ。

解答

(1)　$f(x)=(x^3-x)^2$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^3-x)(3x^2-1) \\ &= 2x(x+1)(x-1)(3x^2-1) \end{aligned}$$

となるので，$f'(x)=0 \iff x=0,\ \pm1,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における増減は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ における $y=f(x)$ の値域は $\boldsymbol{0 \leqq y \leqq \dfrac{4}{27}}$ である.

(2)　実際に割り算を実行すると $f(x)=g(x)(x^4-3x^2+4)-4$ となるので，$\boldsymbol{Q=x^4-3x^2+4,\ R=-4}$ である.

(3)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{R}{g(x)}dx = -4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx \cdots ①$ である．ここで，$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換すると，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ および $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$ であるから，

$$\begin{aligned} ① &= -4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= -4\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta \\ &= \boldsymbol{-\pi} \end{aligned}$$

となる.

(4)　$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において恒等的に 0 ではなく，かつ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqq 0$ であるから，

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx > 0 \cdots ②$$

が成立している．ここで，(2) および (3) の結果を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx &= \int_0^1 \left(Q+\frac{R}{g(x)}\right)dx \\ &= \int_0^1 (x^4-3x^2+4)\,dx - 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5-x^3+4x\right]_0^1 - \pi \end{aligned}$$

$$= 3.2 - \pi$$

となるが，② よりこの値が正であることから，$\pi < 3.2$ である．すなわち，円周率は 3.2 より小さい．　（証明終）

III　座標空間上の $0<x,\ 0<y,\ 0<z$ の領域を H とする。H 内の点 $\mathrm{P}(x_p,\ y_p,\ z_p)$ に対して，$0 \leqq x \leqq x_p$ かつ $0 \leqq y \leqq y_p$ かつ $0 \leqq z \leqq z_p$ を満たす領域を $R(\mathrm{P})$ と表す。H 内に 4 点 P_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ をとり，その座標を実数 t を用いて，P_k $(kt,\ kt,\ 2(73-15kt))$ とそれぞれ定める。これらの点 P_k に対してそれぞれ領域 $R(\mathrm{P}_k)$ を定め，これら 4 つの領域 $R(\mathrm{P}_k)$ の和集合で表される立体を T とする。T の表面積を S とするとき，以下の設問に答えよ。

(1)　t の値の範囲を求めよ。

(2)　$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4$ の 4 点は同一直線上にあることを示せ。

(3)　S を t を用いて表せ。

(4)　S が最大値をとるときの t の値と P_1 の z 座標の値を求めよ。

解答

(1)　P_k の各成分は正であるから，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して，$kt>0$ かつ $2(73-15kt)>0$ を満たせばよい．$k>0$ であるから，

$$0<t<\frac{73}{15k}$$

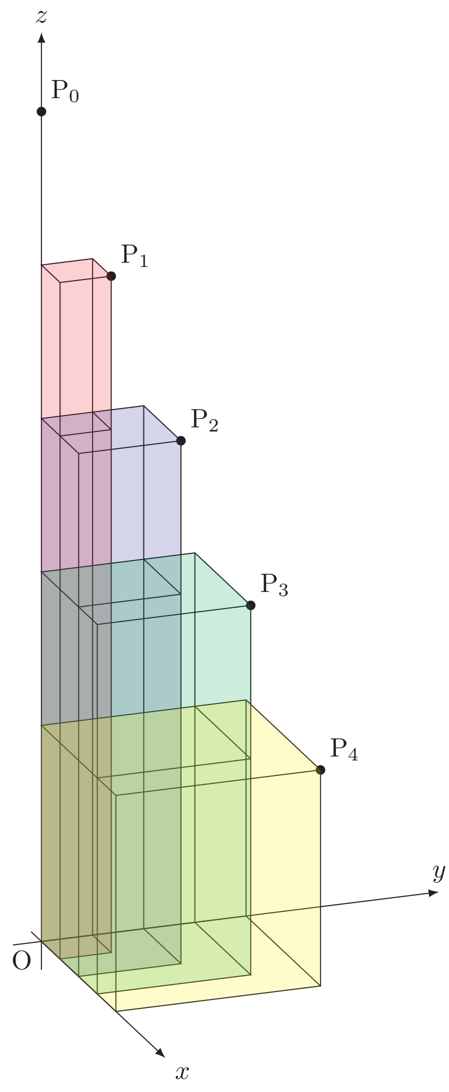
を得る．$k=4$ のとき $\dfrac{73}{15k}$ は最小となる．ゆえに，t の値の範囲は $\boldsymbol{0<t<\dfrac{73}{60}}$ である．

(2)　$\mathrm{P}_0(0,\ 0,\ 2\times 73)$ をとると，

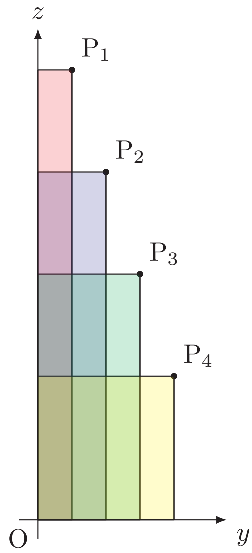
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k}=kt(1,\ 1,\ -30)$$

となるので，4 点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4$ は同一直線上にあることが示された．　(証明終)

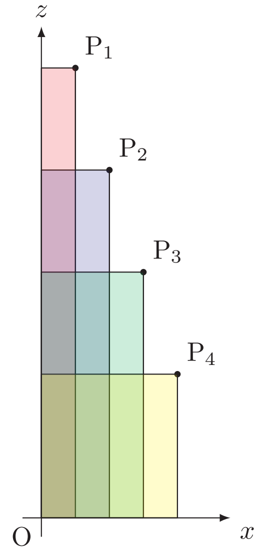
(3)　立体 T は下図のようになる．



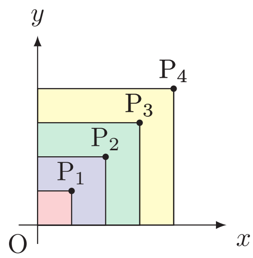
下図は，立体 T を横（x 軸方向または y 軸方向）と上（z 軸方向）から見たときの図である.



x 軸方向からみた図



y 軸方向からみた図



z 軸方向からみた図

立体 T を横（4 方向）から見たときの面積の和を S_1，上下（2 方向）から見たときの面積の和を S_2 とすると，

$$\begin{aligned} S_1 &= 4\times t\{2(73-15t)+2(73-30t)+2(73-45t)+2(73-60t)\} \\ &= 16t(146-75t) \\ S_2 &= 2\times 4t\cdot 4t = 32t^2 \end{aligned}$$

ゆえに，求める表面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= S_1+S_2 \\ &= 16t(146-75t)+32t^2 \\ &= 16\cdot 73(-t^2+2t) \\ &= \mathbf{1168(-t^2+2t)} \end{aligned}$$

(4)　(3) より，

$$S=-1168\{(t-1)^2-1\}$$

であり，(1) より $0<t<\dfrac{73}{60}$ なので，$t=\mathbf{1}$ のとき S は最大値をとる．このとき，$\mathrm{P}_1(1,1,116)$ となるので，P_1 の z 座標の値は $\mathbf{116}$ である.

Ⅳ　t を実数とする。空間の 4 点 A$(1,\ 5,\ 0)$, B$(4,\ 2,\ 0)$, C$(t,\ 2t,\ t-1)$, D$(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の設問に答えよ。

なお各設問の答えは解答用紙の指定欄に記入し，上の枠内には答えの導出過程を簡潔に記入すること。

(1)　△ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3)　∠BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。

解答

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ -3,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (t-1,\ 2t-5,\ t-1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

である．

(i)　∠BAC が直角のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ より，

$$3(t-1) - 3(2t-5) = 0 \iff t = 4$$

(ii)　∠ABC が直角のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ より，

$$3(t-4) - 3(2t-2) = 0 \iff t = -2$$

(iii)　∠ACB が直角のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ より，

$$(t-1)(t-4) + (2t-5)(2t-2) + (t-1)^2 = 0 \iff t = 1,\ \frac{5}{2}$$

以上より，$\boldsymbol{t = -2,\ 1,\ \dfrac{5}{2},\ 4}$.

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,\ 1,\ 1)$ である．A，B，C，D が同一平面上にあるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + l\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表せる．よって，

$$\begin{cases} t-1 = 3k \\ 2t-5 = -3k+l \\ t-1 = l \end{cases}$$

である．これを解いて，$\boldsymbol{t = \dfrac{5}{2}}$, $k = \dfrac{1}{2}$, $l = \dfrac{3}{2}$.

(3)　$t = 4$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3)$ である．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 3\sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 3\sqrt{3}$$

より，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

また，D から平面 ABC へ下ろした垂線の足を H とすると，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{DH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 & \cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{DH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
①\ &\iff (p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + q\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\
&\iff 18p + 3 = 0 \\
&\iff p = -\frac{1}{6} \\
②\ &\iff (p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + q\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \\
&\iff 27q - 6 = 0 \\
&\iff q = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = -\frac{1}{6}(3,\ -3,\ 0) + \frac{2}{9}(3,\ 3,\ 3) - (0,\ 1,\ 1) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{3}\right)$$

となるので，$|\overrightarrow{\mathrm{DH}}| = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$．したがって，四面体 ABCD の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

スカラー 3 重積の知識があれば四面体 ABCD の体積は，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})| \\
&= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}|-9+18| \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

と容易に求められる．

講評

Ⅰ［確率］（やや易）

新課程から導入される「情報Ⅰ」を意識したような問題だった．問題を丁寧に読んで状況を把握できれば，確率の計算自体は基本的である．ここは落とせない．

Ⅱ［数と式，数学Ⅲの微積分］（標準）

整式の剰余と定積分を利用して，円周率 π の評価について考える問題であった．(4) で何をすべきか戸惑った受験生が多かったかもしれない．

Ⅲ［空間座標］（やや難）

座標空間内で定義された 4 つの直方体の和集合について考える問題であった．P_1, P_2, P_3, P_4 が等間隔に並んでいる様子がつかめれば，あとは算数的な処理をしていくことになる．ここは差がつきそうである．なお，大阪府枚方市に関西医科大学および附属病院があり，その敷地内において 2022 年 3 月に「関医タワー」という建物が竣工した．この建物の形状は，本問の立体にそっくりである．(4) の答である P_1 の z 座標 116 は，この建物の実際の高さがほぼ 116 m であることと関係していると思われる．

Ⅳ［空間座標］（やや易）

空間座標内で，3 点が直角三角形の 3 頂点になる条件，4 点が同一平面上にある条件，四面体の体積をそれぞれ求める問題であった．いずれも基本的であり，計算はやや面倒であるが，ここは完答がほしい．なお，「x, y, z を用いた平面の方程式」，「点と平面の距離」，「外積」などが使えると速く処理できる．

本年度前期と同様，大問数は 4 問であったが，難易度は前期に比べると易しくなっている．

4 問のうち比較的解きやすいのは Ⅰ, Ⅳ であった（易しい順に問題が並んでいる訳ではないのは前期と同じ）．この 2 問と Ⅱ の (3) までは完答に近いところまで仕上げたい．それ以外の，Ⅱ (4) とⅢ でどれだけ立ち回れたかの勝負となるだろう．

目標は 70%．