医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

近畿大学医学部（後期）　数学

2023年2月26日実施

1 方程式 $x^4+4x^3+7x^2+2x-5=0\cdots①$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x=t-\alpha$ とおくと，① は t に関する方程式 $t^4+At^2+Bt+C=0$ と表される．α，A，B，C の値をそれぞれ求めよ．

(2) (1) で求めた A，B，C に対して，t に関する恒等式 $t^4+At^2+Bt+C=(t^2+a)^2+b(t+c)^2$ が成り立つ．a，b，c の値をそれぞれ求めよ．ただし，a，b，c はすべて実数とする．

(3) 方程式 ① を解け．

解答

(1) $\alpha=1,\ A=1,\ B=-4,\ C=-3$　(2) $a=1,\ b=-1,\ c=2$　(3) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}$

解説

(1) $x^4+4x^3+7x^2+2x-5=0$ に $x=t-\alpha$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
&x^4+4x^3+7x^2+2x-5=0\\
\iff&(t-\alpha)^4+4(t-\alpha)^3+7(t-\alpha)^2+2(t-\alpha)-5=0\\
\iff&t^4-4\alpha t^3+4t^3+(t\text{ の 2 次以下の式})=0
\end{aligned}
$$

であるから t^3 の係数をみて $\alpha=1$ とわかる．そこで改めて $x^4+4x^3+7x^2+2x-5=0$ に $x=t-1$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
&x^4+4x^3+7x^2+2x-5=0\\
\iff&(t-1)^4+4(t-1)^3+7(t-1)^2+2(t-1)-5=0\cdots②\\
\iff&(t^4-4t^3+6t^2-4t+1)+4(t^3-3t^2+3t-1)+7(t^2-2t+1)+2(t-1)-5=0\\
\iff&t^4+t^2-4t-3=0
\end{aligned}
$$

したがって $\boldsymbol{(\alpha,\ A,\ B,\ C)=(1,\ 1,\ -4,\ -3)}$ である．

別解

② より $t^4+At^2+Bt+C=(t-1)^4+4(t-1)^3+7(t-1)^2+2(t-1)-5$,
t で微分すると $4t^3+2At+B=4(t-1)^3+12(t-1)^2+14(t-1)+2$,
さらに t で微分すると $12t^2+2A=12(t-1)^2+24(t-1)+14$,

〈〈 模試・講座のご案内 〉〉
メビオ学校説明会・無料体験を実施しています
※詳細は最終面をご確認ください

$t=1$ を代入すると $1+A+B+C=-5,\ 4+2A+B=2,\ 12+2A=14$ となるので，$(A,\ B,\ C)=(1,\ -4,\ -3)$ とわかる．

(2)　$(t^2+a)^2+b(t+c)^2=t^4+(2a+b)t^2+2bct+a^2+bc^2$ であるから，

$$t^4+t^2-4t-3=(t^2+a)^2+b(t+c)^2$$

が t に関する恒等式となるとき，

$$\begin{cases} 2a+b &= 1 \quad \cdots ③ \\ 2bc &= -4 \quad \cdots ④ \\ a^2+bc^2 &= -3 \quad \cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ．③ より $b=1-2a$ となるので，これを ④ に代入し，④ を ⑤ に代入すると

$$\begin{cases} (1-2a)c &= -2 \quad \cdots ⑥ \\ a^2-2c &= -3 \quad \cdots ⑦ \end{cases}$$

となる．⑦ より $c=\dfrac{a^2+3}{2}$ を ⑥ に代入して整理すると，

$$2a^3-a^2+6a-7=0 \iff (a-1)(2a^2+a+7)=0$$

となる．a は実数であるから，これをみたす a の値は $a=1$ のみである．このとき $b=-1,\ c=2$ となるので，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(1,\ -1,\ 2)}$ である．

(3)　(2) より

$$\begin{aligned} &(t^2+1)^2-(t+2)^2=0 \\ \iff &\{t^2+1-(t+2)\}\{t^2+1+(t+2)\}=0 \\ \iff &(t^2-t-1)(t^2+t+3)=0 \end{aligned}$$

となるので，これを解いて $t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ となる（i は虚数単位である）．$x=t-1$ であったから，

$$x=\boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}}$$

である．

2 座標空間において，3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通り，中心が原点 O である球面を S とする．S と xy 平面との交線上に点 P，S と yz 平面との交線上に点 Q，S と zx 平面との交線上に点 R をとり，3 点 P, Q, R は $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOQ}=\angle\mathrm{COR}=\theta$ を満たしている．ただし，3 点 P, Q, R の x 座標，y 座標，z 座標はすべて 0 以上とする．

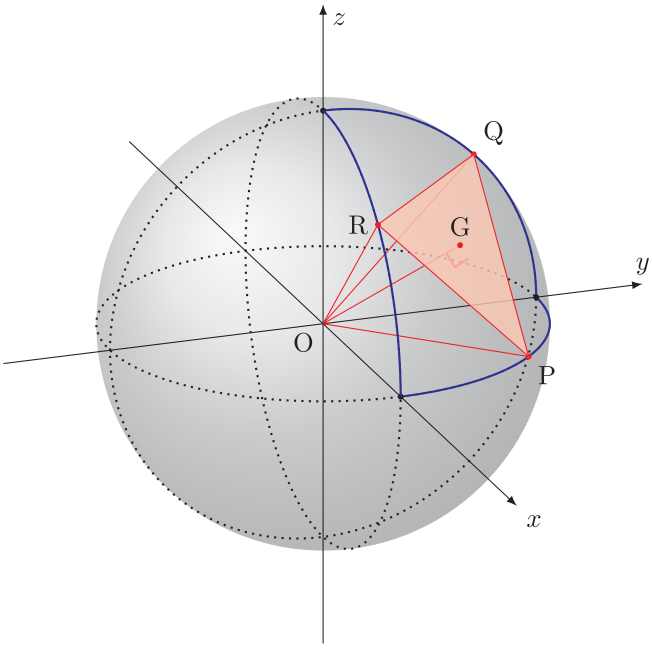
このとき，θ を用いて点 P の座標を表すと $\boxed{\text{ア}}$ であり，点 Q, R の座標はそれぞれ $\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ である．また，△PQR の面積は $\boxed{\text{エ}}$ となる．四面体 OPQR の体積 V は $\boxed{\text{オ}}$ であり，V の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ となる．

解答

ア $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$　イ $(0,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$　ウ $(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$　エ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\sin\theta\cos\theta)$

オ $\dfrac{1}{6}(1-\sin\theta\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)$　カ $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

解説



$\mathrm{P}(\boldsymbol{\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0})$, $\mathrm{Q}(\boldsymbol{0,\ \cos\theta,\ \sin\theta})$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta})$ である．また与条件から $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であり，$0\leqq\sin\theta\leqq1,\ 0\leqq\cos\theta\leqq1$ であることに注意しておく．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-\cos\theta,\ \cos\theta-\sin\theta,\ \sin\theta)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(\sin\theta-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ \cos\theta)$$

であるから，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=\cos^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta\\&=2-2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

同様に，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=2-2\sin\theta\cos\theta$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= -\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\ &\qquad -\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\\ &\qquad +\sin\theta\cos\theta\\ &= 1-\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

であるから，△PQR の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}\\ =&\ \frac{1}{2}\sqrt{(2-2\sin\theta\cos\theta)^2-(1-\sin\theta\cos\theta)^2}\\ =&\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\sin\theta\cos\theta)}\end{aligned}$$

(対称性を考えれば，△PQR は明らかに正三角形であり，一辺の長さは $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{2-2\sin\theta\cos\theta}$ であるから面積はすぐに求まる)

△PQR の重心を G とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)=\frac{1}{3}(\sin\theta+\cos\theta,\ \sin\theta+\cos\theta,\ \sin\theta+\cos\theta)$$

であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\sin\theta+\cos\theta)$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は $\overrightarrow{u}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{u}=-\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)+\sin\theta=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{u}=(\sin\theta-\cos\theta)-\sin\theta+\cos\theta=0$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp$ 平面 PQR である．したがって，四面体 OPQR の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PQR}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{6}(1-\sin\theta\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)}\end{aligned}$$

(△PQR の面積と同様に，対称性より $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp$ 平面 PQR がわかり，体積をすぐに求めることができる)

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ であるから，

$$V=\frac{1}{6}\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)t=\frac{1}{12}(-t^3+3t)$$

となる．$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ から $1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ もわかる．

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{12}(-3t^2+3)=-\frac{1}{4}(t+1)(t-1)$$

なので $1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ では $\dfrac{dV}{dt}\leqq 0$，つまり V は単調減少であるから，V は $t=\sqrt{2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{12}}$ をとる．

的中!!

近畿大学医学部後期直前授業（2/25 入試の前日）

四面体 OABC は，$OA=1$, $OB=2$, $OC=3$, $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90^\circ$ であるとする．このとき，次の $\boxed{}$ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい．

(2)　四面体 OABC の表面積は $\boxed{イ}$ である．

近畿大学医学部模試（2022 年 8 月）

次の文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを答えよ。

辺の長さが $AB=AC=12$, $BC=3$ の三角形 ABC がある。三角形 ABC の外接円上に $AD=BD$, $AE=CE$ となるように 点 D, E をとる。ただし，点 D は点 C を含まない方の弧 AB 上にとり，点 E は点 B を含まない方の弧 AC 上にとるものとする。

(2)　五角形 ADBCE を線分 AB, AC を折り目として折り曲げて点 D と 点 E が 1 点 O で重なるようにし，四面体 OABC をつくる。点 O から 三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線と平面の交点を H とするとき，$OH=\boxed{オ}$ であり，四面体 OABC の体積は $\boxed{カ}$ である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面において，曲線 $C : y = |x^2 - 1|$ と直線 $l : y = (\tan\theta)(x+1)$ は異なる 3 点で交わる．C と l で囲まれる 2 つの部分のうち l の上側にある部分の面積を S，下側にある部分の面積を T とおくとき，次の問いに答えよ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)　$\tan\theta$ の取り得る値の範囲を求めよ．

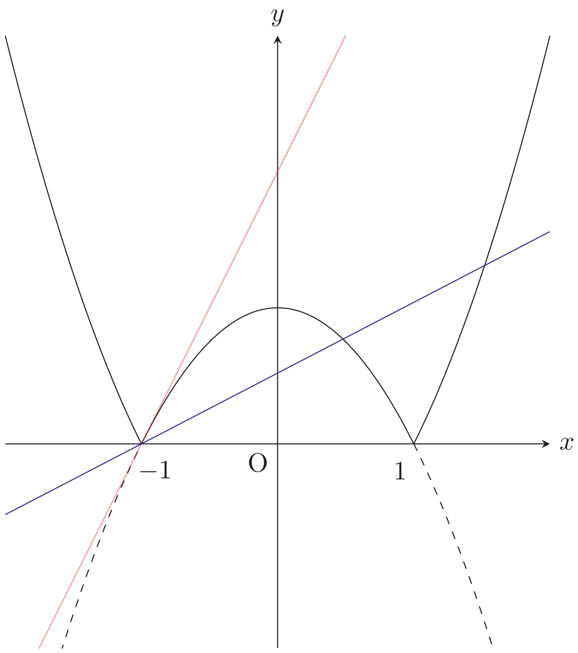
(2)　$S = T$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(3)　$\theta = \dfrac{\pi}{8}$ のとき，T の値を求めよ．

(4)　$T = \dfrac{2}{3}$ のとき，θ の値を求めよ．

解答

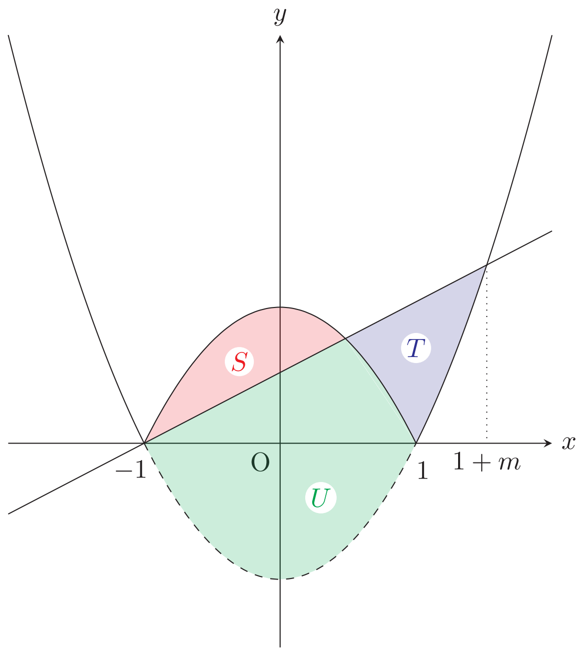
(1)　l は傾きが $\tan\theta$ で定点 $(-1,\ 0)$ を通る直線である．$y = -x^2 + 1$ において，$y' = -2x$ であるから点 $(-1,\ 0)$ での接線の傾きは $y' = 2$ である．よって，グラフで考えて $\mathbf{0 < \tan\theta < 2}$．



(2)　以下，面積の計算では

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を利用する．また，$\tan\theta=m$ とおきかえ，l を $y=m(x+1)$ としておく．



図のような，面積を U とする領域を考えると，

$$S=T \iff S+U=T+U$$

が成り立つ．

$$S+U=2\times\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=2\times\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{2}{6}\cdot 2^3$$

また，l と $y=x^2-1$ から y を消去すると

$$(x+1)(x-1-m)=0 \iff x=-1,\ 1+m$$

となるので，

$$\begin{aligned} T+U&=\int_{-1}^{1+m}\{m(x+1)-(x^2-1)\}dx\\ &=\frac{1}{6}\{(1+m)-(-1)\}^3\\ &=\frac{1}{6}(2+m)^3 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S+U=T+U &\iff \frac{2}{6}\cdot 2^3=\frac{1}{6}(2+m)^3\\ &\iff 2\sqrt[3]{2}=2+m\\ &\iff m=\boldsymbol{\tan\theta=2\sqrt[3]{2}-2} \end{aligned}$$

（これは (1) で求めた範囲を満たす）

(3)　(2) の考察から

$$T+U=\frac{1}{6}(2+m)^3\cdots①$$
$$S+U=\frac{8}{3}\cdots②$$

である．また，l と $y=-x^2+1$ から y を消去すると

$$(x+1)(x-1+m)=0 \iff x=-1,\ 1-m$$

となるので，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{1-m}\{(-x^2+1)-m(x+1)\}dx\\&=\frac{1}{6}\{(1-m)-(-1)\}^3\\&=\frac{1}{6}(2-m)^3\cdots③\end{aligned}$$

である．①－②＋③ より

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{6}(2+m)^3-\frac{8}{3}+\frac{1}{6}(2-m)^3\\&=2m^2\\&=2\tan^2\theta\cdots④\\&=2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}\end{aligned}$$

よって $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき

$$T=2\cdot\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{6-4\sqrt{2}}$$

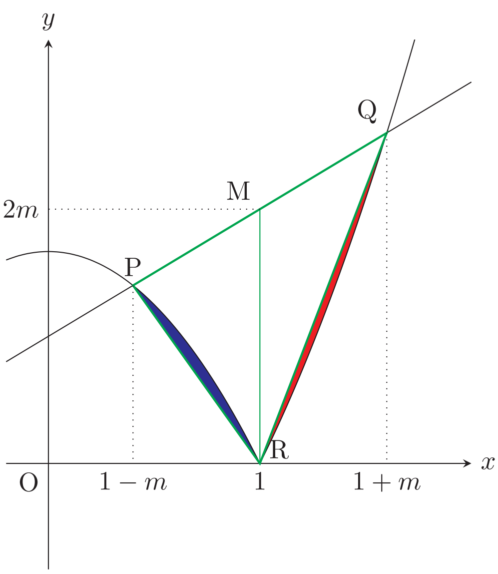
$\boxed{\text{別解}}$

面積 T は以下のように求めてもよい．

右図の青い部分の面積は $\dfrac{1}{6}\{1-(1-m)\}^3=\dfrac{m^3}{6}$,

また，赤い部分の面積は $\dfrac{1}{6}\{(1+m)-1\}^3=\dfrac{m^3}{6}$ であるから，これら 2 つの部分の面積は等しい．したがって，面積 T は $\triangle$PQR の面積に等しい．線分 PQ の中点を M とすると M$(1,\ 2m)$ なので，

$$\begin{aligned}T&=\triangle\mathrm{PQR}\\&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{MR}\cdot\{(1+m)-(1-m)\}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot 2m\\&=2m^2\end{aligned}$$



(4)　④ から $T=2\tan^2\theta=\dfrac{2}{3}$ となる．(1) から $0<\tan\theta<2$ なので

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \iff \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6}}$$

的中!!

近畿大学医学部模試（2022 年 8 月）

関数 $f(x)=x^2-a|x-1|$ について，次の問いに答えよ。ただし a は正の定数とする。

(3)　点 $(1,\ f(1))$ を通り傾きが m である直線を ℓ_2 とする。ℓ_2 と $y=f(x)$ が異なる 3 つの共有点をもつような m の値の範囲を a を用いて表せ。

講評

$\boxed{1}$［高次方程式］（標準～やや難）

4 次方程式を誘導に従って解く問題である．この方法はフェラーリの公式として知られている．途中で $a,\ b,\ c$ は実数と書いてあるので，それ以外は実数とは限らないことに注意する．(1) では実際に代入・展開して係数比較をすればよいが，t^3 の係数が 0 であることから $\alpha=1$ に早めに気付いておきたい．(2) も基本的には展開式の係数比較である．実数条件があるのでここで解が絞られる．ここまで正解すれば (3) は容易に解けるだろう．

$\boxed{2}$［空間図形，三角関数の最大・最小］（標準）

P, Q, R の座標は単位円上の点のパラメータ表示を空間に適用するだけである．対称性から $\triangle$PQR は正三角形になることがわかるので，面積は $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を成分計算して求めることができる．四面体の体積に関しては，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}$ だから O から平面 PQR におろした垂線の足は $\triangle$PQR の外心（本問では重心でもある）に一致することに気付くと楽である．結果は $\sin\theta$, $\cos\theta$ の対称式になるので，$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおいて t の関数として最小値を求めるのが定石だろう．

$\boxed{3}$［数学 II の微積分］（標準）

放物線と直線が囲む面積に関する問題であった．(1) は図をかいて傾きを考えればよいが，面積を求めるためには交点の座標が必要となる．その交点の座標から $\tan\theta$ の範囲を決めることもできる．交点や面積は $\tan\theta=m$ などとおき換えて m の式で表すのがよいだろう．面積は部品となる部分の面積を足したり引いたりして求めることになるが，$\dfrac{1}{6}$ 公式を用いてなるべく楽に計算したい．

2023 年度前期より易化した．$\boxed{1}$ では計算力，$\boxed{2}$ では空間図形に対する把握力が必要であり差がつきそうだが，なるべく完答に近いところまで仕上げたいところである．$\boxed{3}$ は典型問題であり落とせない．

目標は 80%．

解説動画公開中！

https://www.mebio.co.jp/medicalschool/answer/kinki

メルマガ無料登録で全教科配信！　本解答速報の内容に関するお問合せは…　メビオ 0120-146-156 まで

医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/

医学部専門予備校 YMS heart of medicine ☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/

医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/

登録はこちらから

学校説明会 無料体験授業

詳しくはこちら

メビオ校舎にて実施中

メビオがどのようにしてこれまで医学部合格の実績を勝ち取ってきたか、そのメソッドについて説明いたします。また、メビオが誇る一流精鋭講師陣による無料体験授業を受講できます。

同じ日に実施可能なメニュー

・学力診断テスト　・校舎見学

・寮見学　・学習相談

日時

毎日 10:00～20:00

場所

医学部進学予備校メビオ校舎

2泊3日無料体験

・3/ 5(日)～3/ 7(火)

・3/12(日)～3/14(火)

どちらかお好きな日をお選びください。

授業・食堂・寮／毎週日月火

多数の医学部合格者を生み出してきたメビオのすべてを2泊3日でじっくり無料体験できます。

「メビオの授業の様子を体感したい」

「どんな講師がいるか気になる」

「寮に入ろうか悩んでいる」

そんな方はぜひ一度体験してみてください。

通学生（寮利用なし）の無料体験も受け付けています。

詳しくはこちら

詳しくは Web またはお電話で

医学部進学予備校 メビオ フリーダイヤル 0120-146-156

校舎にて個別説明会も随時開催しています。

【受付時間】9:00～21:00（土日祝可）

大阪府大阪市中央区石町 2-3-12 ベルヴァア天満橋

天満橋駅（京阪／大阪メトロ谷町線）より徒歩4分