解答速報

久留米大学医学部（後期）　数学

2023年3月8日実施

1.

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，不等式 $(1+\sqrt{3})\sin\theta + (2+\sqrt{3})\cos\theta \leqq |\cos\theta|$ を満たす θ は

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$$

である。

(2)　z は複素数で，$|z| = 1$ であるとき，$z^2 - 2z + \dfrac{1}{z}$ が純虚数であるような z の値は

$$z = \frac{\boxed{\text{オカ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,i}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$, $\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{7}{4}$
$\dfrac{\text{オカ} \pm \sqrt{\text{キ}}\,i}{\text{ク}}$	$\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

解説

(1)　(i)　$\cos\theta \geqq 0$，つまり $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$(1+\sqrt{3})\sin\theta + (2+\sqrt{3})\cos\theta \leqq \cos\theta$$
$$\iff (1+\sqrt{3})(\sin\theta + \cos\theta) \leqq 0$$
$$\iff (\sqrt{2}+\sqrt{6})\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 0$$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ も考慮すると，$\dfrac{7}{4}\pi \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq 2\pi$.
したがって，$\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{4}\pi$ である.

(ii)　$\cos\theta < 0$，つまり $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(1+\sqrt{3})\sin\theta + (2+\sqrt{3})\cos\theta \leqq -\cos\theta \\
\iff &(1+\sqrt{3})(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) \leqq 0 \\
\iff &2(1+\sqrt{3})\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leqq 0
\end{aligned}
$$

$\dfrac{5}{6}\pi < \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{11}{6}\pi$ も考慮すると，$\pi \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{11}{6}\pi$.

したがって，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ である．

(i), (ii) より，求める θ の範囲は，$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{4}\pi}$ である．

$\boxed{\text{別解}}$

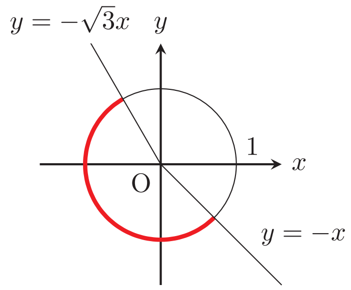
$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とおくと，与不等式は

$$(1+\sqrt{3})y + (2+\sqrt{3})x \leqq |x| \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 = 1$$

と言い換えられる．このうち前半の不等式は，

$x \geqq 0$ のとき $(1+\sqrt{3})y + (2+\sqrt{3})x \leqq x \iff y \leqq -x$

$x < 0$ のとき $(1+\sqrt{3})y + (2+\sqrt{3})x \leqq -x \iff y \leqq -\sqrt{3}x$



となる．したがって，右図の太線部分に対応する θ の範囲を考えればよいので，同じ結果が得られる．

(2)　$z^2 - 2z + \dfrac{1}{z}$ が純虚数である条件は，

$$z^2 - 2z + \frac{1}{z} = -\left(\overline{z^2 - 2z + \frac{1}{z}}\right) \neq 0 \cdots ①$$

が成り立つことである．また，$|z| = 1$ から

$$|z|^2 = 1 \iff z\overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \frac{1}{z}$$

であることと合わせて，

$$
\begin{aligned}
&z^2 - 2z + \frac{1}{z} = -\left((\overline{z})^2 - 2\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right) = -\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} - z \\
\iff &z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \\
\iff &\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 2 = 0 \\
\iff &z + \frac{1}{z} = 2,\ -1
\end{aligned}
$$

を得る．

(i)　$z + \dfrac{1}{z} = 2$ のとき

両辺を z 倍して整理すると，$z^2 - 2z + 1 = 0$ となり，これを解くと $z = 1$．しかしこのとき $z^2 - 2z + \dfrac{1}{z} = 0$ となり，① を満たさない．

(ii) $z+\dfrac{1}{z}=-1$ のとき

両辺を z 倍して整理すると，$z^2+z+1=0$ となり，これを解くと $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となる．（これは ① を満たす）

以上より，$z=\boldsymbol{\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ である．

別解 1

$|z|=1$ より，$z=\cos\theta+i\sin\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi)$ (ただし i は虚数単位) とおける．このとき，

$$\begin{aligned}z^2-2z+\frac{1}{z}&=(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)-2(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))\\&=(\cos 2\theta-\cos\theta)+(\sin 2\theta-3\sin\theta)i\end{aligned}$$

と表される．これが純虚数となることから

$$\begin{aligned}&\cos 2\theta-\cos\theta=0\\\iff&2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0\\\iff&\cos\theta=-\frac{1}{2},\ 1\\\iff&\theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi\\\iff&z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

であるが，$z=1$ のときは与式が実数となるため不適である．したがって，$z=\boldsymbol{\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ である．

別解 2

$z=a+bi$ ($a,\ b$ は実数) とすると，$|z|=1$ より $a^2+b^2=1\cdots$② であり，

$$\begin{aligned}z^2-2z+\frac{1}{z}&=(a+bi)^2-2(a+bi)+\frac{1}{a+bi}\\&=a^2+2abi-b^2-2a-2bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}\\&=a^2-b^2-a+(2ab-3b)i\end{aligned}$$

と表される．これが純虚数となることから

$$\begin{aligned}&a^2-b^2-a=0\\\iff&2a^2-a-1=0\\\iff&a=-\frac{1}{2},\ 1\end{aligned}$$

② と合わせて $(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$(1,\ 0)$ を得るが，$(a,\ b)=(1,\ 0)$ のときは与式が実数となるため不適である．したがって，$z=\boldsymbol{\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ である．

2.

(1)　x が実数のとき，関数 $f(x)=\sqrt{13-x}-x+1$ の最小値は $\boxed{\text{ケコサ}}$ である。

(2)　無限等比数列 $\left\{\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{13-x}}\right)^n\right\}$ が収束するような，整数 x の個数は $\boxed{\text{シ}}$ 個である。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{\sqrt{13-x}}\right)^n$ が収束するとき，整数 x の個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個である。また，整数 x で収束するときの和の最大値と最小値は

$$x=\boxed{\text{セ}}\ \text{のとき，最大値}\ \frac{\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

$$x=\boxed{\text{テト}}\ \text{のとき，最小値}\ \frac{\boxed{\text{ナ}}-\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

である。

解答

解答記号	正解
ケコサ	-12
シ	7
ス	6
セ	3
$\dfrac{\text{ソ}+\sqrt{\text{タチ}}}{\text{ツ}}$	$\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$
テト	-2
$\dfrac{\text{ナ}-\sqrt{\text{ニヌ}}}{\text{ネ}}$	$\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}$

解説

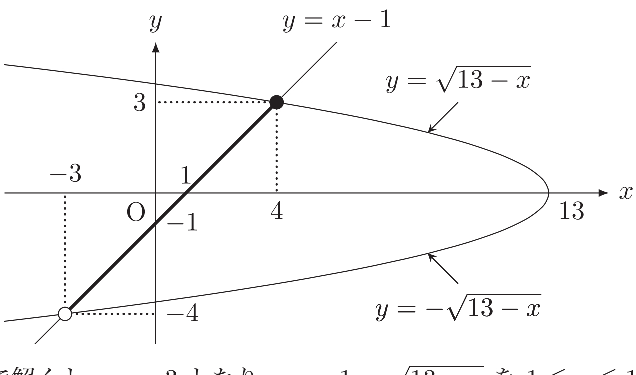
(1)　この関数の定義域は $x\leqq 13$ である．$f(x)$ は明らかに単調減少であるから，求める最小値は $f(13)=\mathbf{-12}$ である．

(2)　無限等比数列 $\left\{\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{13-x}}\right)^n\right\}$ が収束するための条件は，$x<13$ の条件のもとで

$$-1<\frac{x-1}{\sqrt{13-x}}\leqq 1$$

$$\Longleftrightarrow\ -\sqrt{13-x}<x-1\leqq\sqrt{13-x}\cdots①$$

である．



ここで，$-\sqrt{13-x}=x-1$ を $x\leqq 1$ の条件のもとで解くと $x=-3$ となり，$x-1=\sqrt{13-x}$ を $1\leqq x\leqq 13$ の条件のもとで解くと $x=4$ となるので，上のグラフより不等式 ① の解は $-3<x\leqq 4$ となる．したがって，この範囲にある整数 x は $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の $\mathbf{7}$ 個である．

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{\sqrt{13-x}}\right)^n$ が収束するための条件は

$$-1<\frac{x-1}{\sqrt{13-x}}<1 \iff -3<x<4$$

であるから（(2) の議論を利用した），この範囲にある整数 x は $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ の **6** 個である．また，このときこの無限級数の和は

$$\frac{\dfrac{x-1}{\sqrt{13-x}}}{1-\dfrac{x-1}{\sqrt{13-x}}}=\frac{x-1}{\sqrt{13-x}-(x-1)}(=g(x) \text{ とおく})$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} g'(x)&=\frac{\sqrt{13-x}-(x-1)-(x-1)\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{13-x}}-1\right)}{\left\{\sqrt{13-x}-(x-1)\right\}^2}\\ &=\frac{25-x}{2\sqrt{13-x}\left\{\sqrt{13-x}-(x-1)\right\}^2}>0 \end{aligned}$$

であるから，$g(x)$ は単調増加である．したがって，和の最大値は $x=\mathbf{3}$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}}$ であり，和の最小値は $x=\mathbf{-2}$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}}$ である．

別解

無限級数の和が最大となる x の値は次のようにして求めることも可能である．

$r=\dfrac{x-1}{\sqrt{13-x}}$ とおくと，この無限級数の和は $\dfrac{r}{1-r}=-1+\dfrac{1}{1-r}$ となる．この関数は $-1<r<1$ の範囲において単調増加である．ここで $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ のそれぞれの値に対応する r の値は次のようになる．

x	-2	-1	0	1	2	3
r	$-\dfrac{3}{\sqrt{15}}$	$-\dfrac{2}{\sqrt{14}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{11}}$	$\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

したがって r は $x=3$ のとき最大，$x=-2$ のとき最小であるから，それぞれの x の値で無限級数の和は最大，最小となる．

注：(2)(3) においては $x>13$ をみたす整数については公比が虚数となるので，$x<13$ と解釈して解いた．ただし，$x>13$ のときは公比の絶対値は 1 より大きくなるので収束することはない．

3. 箱の中に 1 から 8 までの数字が書かれた球が 1 つずつ合計 8 個入っている。この箱の中から無作為に 1 個の球を取り出し，球に書かれた数字を見た上で，箱の中に戻すという試行を繰り返す。k 回目に出た球に書かれた数を a_k とし，$a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n=S_n$ とする。S_n が 3 の倍数となる確率を p_n とするとき，

(1) 1 回の試行で，取り出された球に書かれた数を 3 で割った余りが 0 である確率は $\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}$ であり，3 で割った余りが 1 である確率は $\dfrac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}$ であり，3 で割った余りが 2 である確率は $\dfrac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}$ である。

(2) a_1 を 3 で割った余りが 0 であり，かつ，S_2 を 3 で割った余りが 0 となる確率は $\dfrac{\boxed{マ}}{\boxed{ミム}}$ であり，a_1 を 3 で割った余りが 0 ではなく，かつ，S_2 を 3 で割った余りが 0 となる確率は $\dfrac{\boxed{メ}}{\boxed{モヤ}}$ である。

よって，確率 p_2 は $p_2=\dfrac{\boxed{ユヨ}}{\boxed{ラリ}}$ である。

(3) p_{n+1} を p_n で表すと

$$p_{n+1}=\frac{\boxed{あい}}{\boxed{う}}p_n+\frac{\boxed{え}}{\boxed{お}}$$

よって，確率 p_n は，

$$p_n=\frac{\boxed{か}}{\boxed{き}}+\frac{\boxed{く}}{\boxed{け}}\cdot\left(\frac{\boxed{こさ}}{\boxed{し}}\right)^n$$

である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{ノ}{ハ}$	$\dfrac{1}{4}$
$\dfrac{ヒ}{フ}$	$\dfrac{3}{8}$
$\dfrac{ヘ}{ホ}$	$\dfrac{3}{8}$
$\dfrac{マ}{ミム}$	$\dfrac{1}{16}$
$\dfrac{メ}{モヤ}$	$\dfrac{9}{32}$
$\dfrac{ユヨ}{ラリ}$	$\dfrac{11}{32}$
$\dfrac{あい}{う}$, $\dfrac{え}{お}$	$\dfrac{-1}{8}$, $\dfrac{3}{8}$
$\dfrac{か}{き}$, $\dfrac{く}{け}$, $\dfrac{こさ}{し}$	$\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{-1}{8}$

解説

1 回の試行で取り出された球を 3 つの集合に分け，$A=\{3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 4,\ 7\}$, $C=\{2,\ 5,\ 8\}$ とする.

(1)　1 回の試行で，取り出された球に書かれた数を

3 で割った余りが 0 となるには A の球を取り出せばよいので，求める確率は $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ である．

3 で割った余りが 1 となるには B の球を取り出せばよいので，求める確率は $\mathbf{\dfrac{3}{8}}$ である．

3 で割った余りが 2 となるには C の球を取り出せばよいので，求める確率は $\mathbf{\dfrac{3}{8}}$ である．

(2)　a_1 を 3 で割った余りが 0 であり，かつ，S_2 を 3 で割った余りが 0 となるには，1 回目，2 回目ともに A の球を取り出せばよいので，求める確率は $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{1}{16}}$ である．また，a_1 を 3 で割った余りが 0 でなく，かつ，S_2 を 3 で割った余りが 0 となるには，1 回目が B かつ 2 回目が C，または 1 回目が C かつ 2 回目が B の球を取り出せばよいので，求める確率は $\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot 2=\mathbf{\dfrac{9}{32}}$ である．以上より S_2 を 3 で割った余りが 0 となる確率は $\dfrac{1}{16}+\dfrac{9}{32}=\mathbf{\dfrac{11}{32}}$ である．

(3)　S_{n+1} が 3 の倍数となるのは

(i)　S_n を 3 で割った余りが 0 で，$n+1$ 回目に A から球を取り出す

(ii)　S_n を 3 で割った余りが 1 で，$n+1$ 回目に C から球を取り出す

(iii)　S_n を 3 で割った余りが 2 で，$n+1$ 回目に B から球を取り出す

のいずれかのときである．B, C から球を取り出す確率はいずれも $\dfrac{3}{8}$ であることに注意すると

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{8}(1-p_n)=\mathbf{\frac{-1}{8}}p_n+\mathbf{\frac{3}{8}}$$

である．これを変形して，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

となるので，$\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{12}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列である．したがって，

$$p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\iff p_n=\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1}{8}\right)^{n}}$$

4. 放物線 $y=2x^2$ と円 $x^2+(y-2)^2=\dfrac{r^2}{9}$ がある。ただし，r は正の定数とする。

(1) $r=6$ のとき，放物線と円の共有点の座標 $(x,\ y)$ は，

$$\left(\boxed{\text{す}},\ \boxed{\text{せ}}\right),\ \left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{そ}}}}{\boxed{\text{た}}},\ \frac{\boxed{\text{ち}}}{\boxed{\text{つ}}}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{\boxed{\text{て}}}}{\boxed{\text{と}}},\ \frac{\boxed{\text{な}}}{\boxed{\text{に}}}\right)$$

である。

(2) r が正の実数をとって変化するとき，放物線と円の共有点の個数は，

$0<r<\dfrac{\boxed{\text{ぬ}}\sqrt{\boxed{\text{ねの}}}}{\boxed{\text{は}}}$ のとき，　$\boxed{\text{ひ}}$ 個

$r=\dfrac{\boxed{\text{ぬ}}\sqrt{\boxed{\text{ねの}}}}{\boxed{\text{は}}}$，$\boxed{\text{ふ}}<r$ のとき，　$\boxed{\text{へ}}$ 個

$r=\boxed{\text{ふ}}$ のとき，　$\boxed{\text{ほ}}$ 個

$\dfrac{\boxed{\text{ぬ}}\sqrt{\boxed{\text{ねの}}}}{\boxed{\text{は}}}<r<\boxed{\text{ふ}}$ のとき，　$\boxed{\text{ま}}$ 個

である。

解答

解答記号	正解
す，せ	0，0
$\dfrac{\sqrt{\text{そ}}}{\text{た}}$, $\dfrac{\text{ち}}{\text{つ}}$	$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{7}{2}$
$-\dfrac{\sqrt{\text{て}}}{\text{と}}$, $\dfrac{\text{な}}{\text{に}}$	$-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{7}{2}$
$\dfrac{\text{ぬ}\sqrt{\text{ねの}}}{\text{は}}$	$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$
ひ	0
ふ	6
へ	2
ほ	3
ま	4

解説

(1)

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{y}{2} & \cdots ① \\ x^2+(y-2)^2=\dfrac{r^2}{9} & \cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入すると，

$$\frac{y}{2}+(y-2)^2=\frac{r^2}{9}$$

$$\iff y^2-\frac{7}{2}y+4-\frac{r^2}{9}=0\cdots ③$$

$r=6$ のとき，

$$y^2-\frac{7}{2}y=0$$

となるので，$y=0,\ \dfrac{7}{2}$．これと①より，$(x,\ y)=\mathbf{(0,\ 0)},\ \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{7}{2}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$.

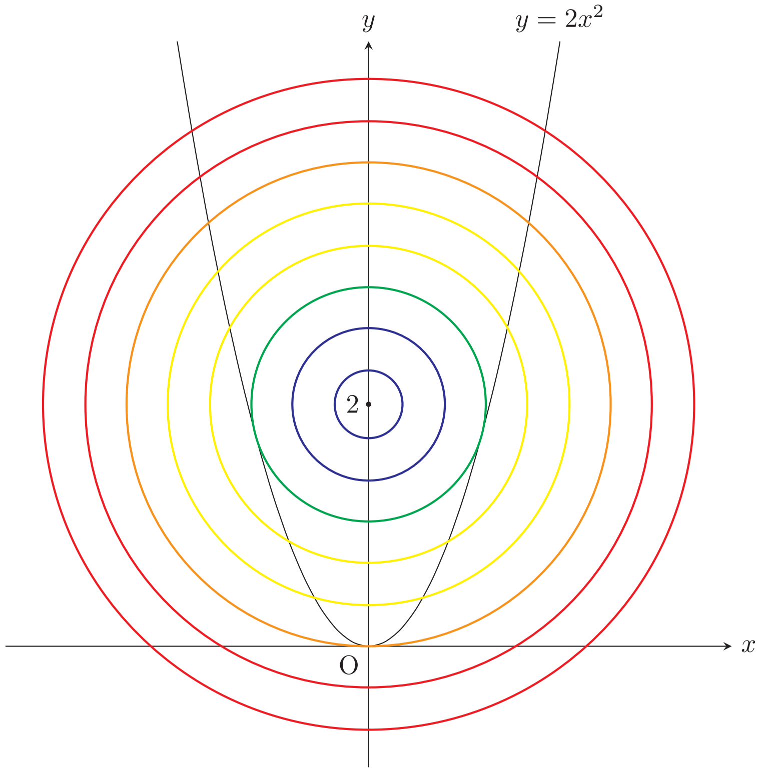
(2) ③が $y=\dfrac{7}{4}$ で重解となるのは，判別式を D とおくと，

$$D=\frac{49}{4}-4\left(4-\frac{r^2}{9}\right)=0 \iff r^2=\frac{9\cdot 15}{16}$$

より $r=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ のときである．このとき，放物線と円は接する．このことと (1) より，r の変化の様子を図示すると下図のようになる $\left(r=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}\right.$ のときが 緑色，$r=6$ のときが 橙色 である$\Big)$．共有点の個数は，

$0<r<\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ のとき，	**0** 個	(青色)
$r=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$, $6<r$ のとき，	**2** 個	(緑色と赤色)
$r=6$ のとき，	**3** 個	(橙色)
$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}<r<6$ のとき，	**4** 個	(黄色)

となる．



5. xyz 空間において,

$$\text{立体 A}:\begin{cases}|x| \leqq 1\\|y| \leqq 1\\z \geqq 0\end{cases}\qquad\qquad \text{立体 B}: |x|+|y| \leqq 2-z$$

があり，立体 A と立体 B の共通部分からなる立体を T とするとき，立体 T の体積 V を求める。

(1) 立体 T の z のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{み}} \leqq z \leqq \boxed{\text{む}}$ である。

(2) 立体 T において，z の $\boxed{\text{め}} \leqq z \leqq \boxed{\text{も}}$ の部分は，立体 B そのものである。

(3) 立体 T を平面 $z=t$ で切った切り口の面積を求める。$\boxed{\text{み}} \leqq t \leqq \boxed{\text{め}}$ のとき，その切り口の面積は $\boxed{\text{や}} - \boxed{\text{ゆ}}t^{\boxed{\text{よ}}}$ であり，$\boxed{\text{め}} \leqq t \leqq \boxed{\text{も}}$ のとき，その切り口の面積は $\boxed{\text{ら}}\left(\boxed{\text{り}}-t\right)^{\boxed{\text{る}}}$ である。

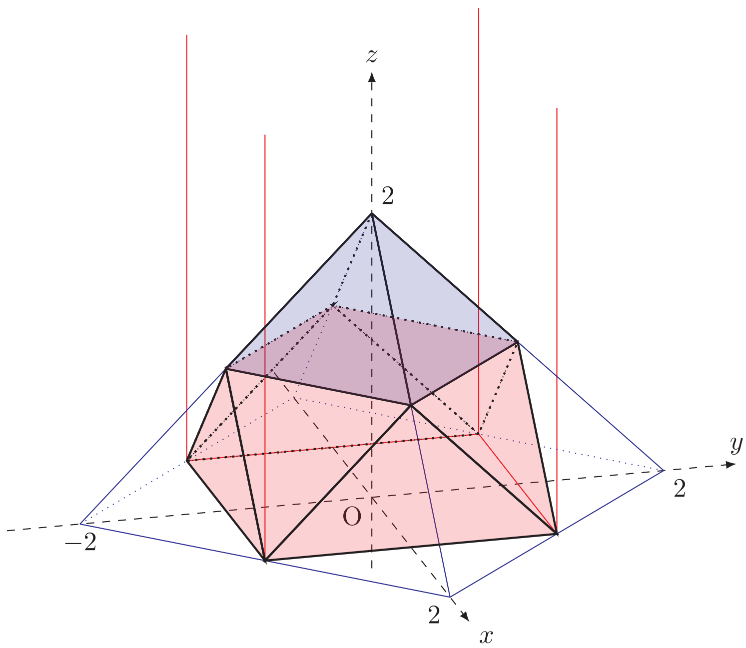
(4) 立体 T の体積は $\boxed{\text{れ}}$ である。

解答

解答記号	正解
み，む	0，2
め，も	1，2
や − ゆ $t^{よ}$	$4-2t^2$
ら (り − t)^{る}	$2(2-t)^2$
れ	4

解説

立体 A と立体 B の共通部分である立体 T は次のような図形である.

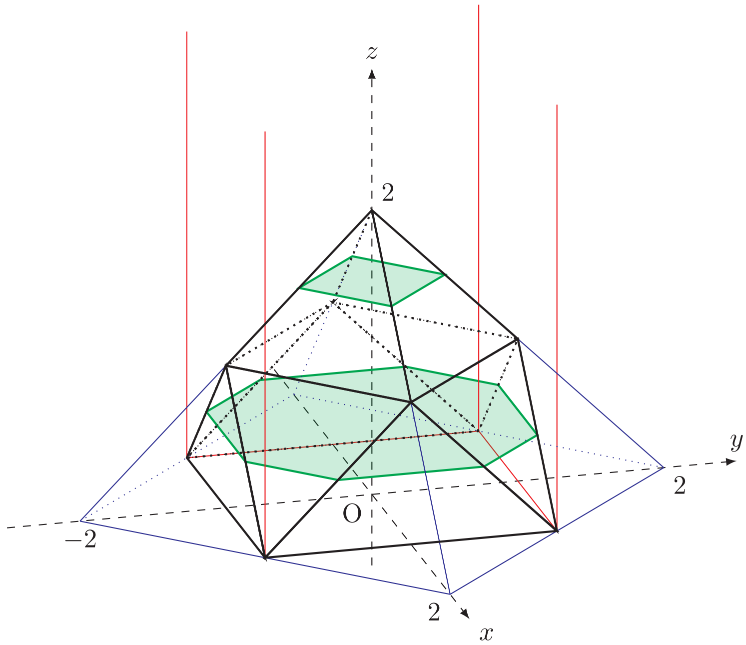


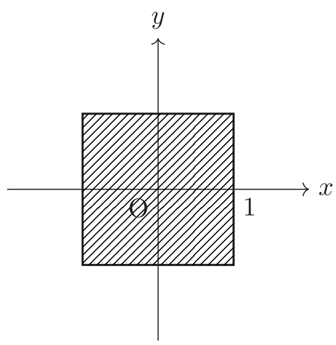
(1) 立体 A においては $z \geqq 0$, 立体 B においては $z \leqq 2$ が成り立っているので，$0 \leqq z \leqq 2$ が必要であるが，$0 \leqq t \leqq 2$ のとき $(0,\ 0,\ t) \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ であるから，とりうる値の範囲は $\mathbf{0 \leqq z \leqq 2}$ とわかる.

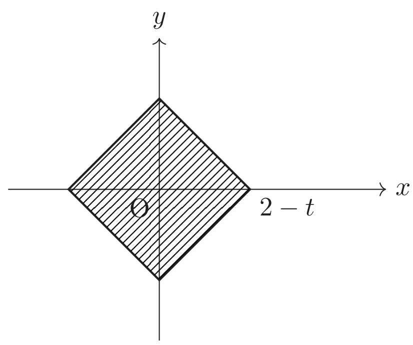
(2) 平面 $S: z=t\ (0 \leqq t \leqq 2)$ での切り口を考える．A を S で切った切り口は $|x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1$, つまり

$(-1,\ -1,\ t)$, $(1,\ -1,\ t)$, $(1,\ 1,\ t)$, $(-1,\ 1,\ t)$, を頂点とする正方形の周および内部の領域である．

また B を S で切った切り口は $|x|+|y| \leqq 2-t$, つまり $(-(2-t),\ 0,\ t)$, $(0,\ -(2-t),\ t)$, $(2-t,\ 0,\ t)$, $(0,\ 2-t,\ t)$, を頂点とする正方形の周および内部の領域である．

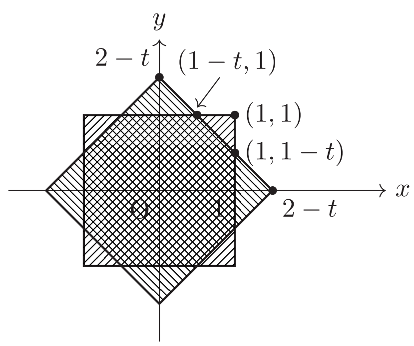






$0 \leqq 2-t \leqq 1$ つまり $1 \leqq t \leqq 2$ の場合 B $\cap\, S$ は A $\cap\, S$ に含まれてしまう．したがって $\boldsymbol{1 \leqq t \leqq 2}$ においては，立体 T は 立体 B そのものである．

(3)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，A, B の S による切り口は次のように重なっている．



重なり部分は，一辺 2 の正方形から，3 辺の長さが t, t, $\sqrt{2}t$ の直角二等辺三角形 4 つを取り除いた図形になっているので，その面積は $4-\dfrac{t^2}{2}\times 4 = \boldsymbol{4-2t^2}$ であることがわかる．

また $1 \leqq t \leqq 2$ のとき，T の切り口は B の切り口に一致し，その面積は $\dfrac{1}{2}(2-t)^2 \times 4 = \boldsymbol{2(2-t)^2}$ である．

(4)　立体 T の体積を V とする．(3) より

$$V = \int_0^1 (4-2t^2)dt + \int_1^2 2(2-t)^2 dt$$

$$= \left[4t - \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}(2-t)^3\right]_1^2$$

$$= \left(4 - \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \mathbf{4}$$

講評

1.［三角関数，複素数平面］（標準）

小問集合だった．いずれも落としたくない．(1) の三角関数の不等式は，場合分けして丁寧に作業したい．(2) の複素数平面は，解説で示したように，純虚数条件 $z=-\overline{z}$ $(z \neq 0)$ を使う，z を極形式でおく，$z=a+bi$ $(a,\ b\ \in \mathrm{R})$ とおく，などいろいろな方法がある．

2.［数学Ⅲの極限］（やや難）

無限等比数列・級数が収束する条件，および級数の和の最大値・最小値を求める問題だった．問い方が典型的ではないので戸惑った受験生が多かったかもしれない．ここは差がつきそうである．

3.［数列・確率］（標準）

確率漸化式の問題．S_n を 3 で割った余りで分けると 3 種類となるが，余りが 1, 2 のときは結局まとめられることに気付けるかがポイント．よくあるタイプなので，できれば完答が望まれる．

4.［図形と方程式］（標準）

放物線と，その軸上に中心がある円との共有点の個数を考える問題．典型問題であるが，解いた経験の有無で差がつきそうである．x^2 を消去した上で判別式を利用するのが簡単だが，記述形式であればいろいろ議論が必要になってくる．

5.［空間図形，数学Ⅲの積分］（やや難）

座標空間において，不等式で表された 2 つの立体の共通部分の体積を求める問題．この手の問題に慣れていないと厳しかったかもしれないが，切り口の図形自体は平易であり，また t の値で場合分けすることも問題文で提示されているので，できれば完答したいところである．

2023 年度前期と比較して，分量，問題の難易度ともにだいぶ得点しやすいセットとなっている．大問 1, 3, 4 を完答した上で，大問 2, 5 でどれだけ立ち回れたかの勝負となるだろう．

目標は 75%.