医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

大阪医科薬科大学(前期)　数学

2024年2月10日実施

解説動画公開中!!
https://youtu.be/d1hth0jJUog
https://youtu.be/d9apIADmsxc

〔1〕

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{2a_n + 5}{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対し，$a_n \geqq 2$ であることを示せ。

(2)　ある自然数 n に対して，$a_n < \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} > \sqrt{5}$,
また，$a_n > \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} < \sqrt{5}$ であることを示せ。

(3)　すべての自然数 n に対し，

$$\left|a_{n+1} - \sqrt{5}\right| \leqq \frac{\sqrt{5} - 2}{4}\left|a_n - \sqrt{5}\right|$$

であることを示せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解答

(1)　$a_n \geqq 2 \cdots (*)$ が成り立つことを自然数 n についての数学的帰納法で示す．

(Ⅰ)　$n = 1$ のとき $a_1 = 2$ より $(*)$ は成り立つ．

(Ⅱ)　$n = k$　(k はある自然数) のとき $(*)$ が成り立つとする．すなわち，

$$a_k \geqq 2 \cdots ①$$

が成り立つと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2a_k + 5}{a_k + 2} \\ &= 2 + \frac{1}{a_k + 2} \\ &\geqq 2 \quad (\because ①) \end{aligned}$$

となるので $(*)$ は $n = k + 1$ のときも成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より $(*)$ はすべての自然数 n について成り立つ．　(証明終)

(2)

$$a_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{2a_n + 5}{a_n + 2} - \sqrt{5}$$

$$= \frac{2a_n + 5 - \sqrt{5}(a_n + 2)}{a_n + 2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{5}}{a_n + 2}(a_n - \sqrt{5})$$

ここで，$\dfrac{2 - \sqrt{5}}{a_n + 2} < 0$ であることから $a_n < \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} > \sqrt{5}$ であり， $a_n > \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} < \sqrt{5}$ である．　(証明終)

(3)　(2) の議論から

$$\left|a_{n+1} - \sqrt{5}\right| = \left|\frac{2 - \sqrt{5}}{a_n + 2}(a_n - \sqrt{5})\right|$$
$$= \frac{\sqrt{5} - 2}{a_n + 2}\left|a_n - \sqrt{5}\right|$$
$$\leqq \frac{\sqrt{5} - 2}{4}\left|a_n - \sqrt{5}\right| \quad (\because a_n \geqq 2)$$

(証明終)

(4)　(3) で得られた不等式を繰り返し用いると

$$0 \leqq \left|a_n - \sqrt{5}\right| \leqq \frac{\sqrt{5} - 2}{4}\left|a_{n-1} - \sqrt{5}\right|$$
$$\leqq \left(\frac{\sqrt{5} - 2}{4}\right)^2 \left|a_{n-2} - \sqrt{5}\right|$$
$$\leqq \cdots$$
$$\leqq \left(\frac{\sqrt{5} - 2}{4}\right)^{n-1} \left|a_1 - \sqrt{5}\right|$$

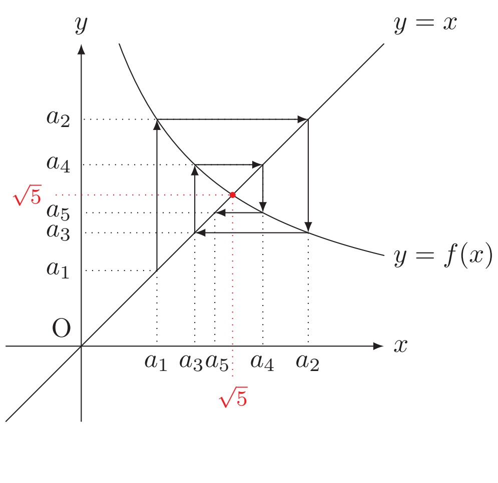
ここで $0 \leqq \dfrac{\sqrt{5} - 2}{4} < 1$ であるから，

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 2}{4}\right)^{n-1} \left|a_1 - \sqrt{5}\right| = 0$$

である．したがって，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left|a_n - \sqrt{5}\right| = 0$，すなわち $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \boldsymbol{\sqrt{5}}$ である．

注釈

$f(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 2}$ とすると $a_{n+1} = f(a_n)$ である．$y = f(x)$ のグラフは次のようになっている．$y = f(x)$ と $y = x$ の交点は $\left(\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right)$ である．



このグラフを見ると，$(a_1,\ a_1)$, $(a_1,\ a_2)$, $(a_2,\ a_2)$, $(a_2,\ a_3)$, $\cdots$ は，$(\sqrt{5},\ \sqrt{5})$ に渦を巻きながら近付いていくことがわかる．

【参考】与漸化式から一般項 a_n が求められる．与漸化式から

$$a_{n+1}+\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})\frac{a_n+\sqrt{5}}{a_n+2}$$

$$a_{n+1}-\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})\frac{a_n-\sqrt{5}}{a_n+2}$$

が得られる．この第 2 式と $a_1=2$ から，$a_n \fallingdotseq \sqrt{5}$ であることが帰納的にわかるので，辺々を割ることで

$$\frac{a_{n+1}+\sqrt{5}}{a_{n+1}-\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\cdot\frac{a_n+\sqrt{5}}{a_n-\sqrt{5}}$$

が得られる．$\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=-9-4\sqrt{5}=\alpha$ とおくと，$\dfrac{a_1+\sqrt{5}}{a_1-\sqrt{5}}=\alpha$ であるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n+\sqrt{5}}{a_n-\sqrt{5}}\right\}$ は初項 α，公比 α の等比数列である．したがって

$$\frac{a_n+\sqrt{5}}{a_n-\sqrt{5}}=\alpha\cdot\alpha^{n-1}=\alpha^n$$

となる．これを a_n について解くと

$$a_n=\frac{\sqrt{5}(\alpha^n+1)}{\alpha^n-1}$$

となる．これより (4) の極限が求まる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n+1}{\alpha^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\alpha^n}}{1-\dfrac{1}{\alpha^n}}=1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{5}$ である．

2/9 大阪医科薬科大学直前授業（入試日の前日）

数列 $\{a_n\}$ は

$$0<a_1<3,\quad a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすものとする．

(1)　すべての自然数 n に対して，$0<a_n<3$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての自然数 n に対して，$3-a_n \leqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$ となることを示せ．

〔2〕 座標空間に点 A(2, 1, 3) と点 B(1, 3, 4) があり，また zx 平面上を動く点 P と yz 平面上を動く点 Q がある。次の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結果のみ解答せよ。

(1) 線分の長さの和 $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ の最小値を求めよ。
また和が最小になるときの点 P の座標を求めよ。

(2) 3 つの線分の長さの和 $\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{BQ}$ の最小値を求めよ。
また和が最小となるときの点 P，点 Q の座標を求めよ。

解答

(1) 点 A と点 B は zx 平面に関して同じ側にある．ここで，zx 平面に関する点 A の対称点を A′ とすると，A′(2, −1, 3) であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}+\mathrm{BP}&=\mathrm{A'P}+\mathrm{BP}\\&\geqq \mathrm{A'B}\end{aligned}$$

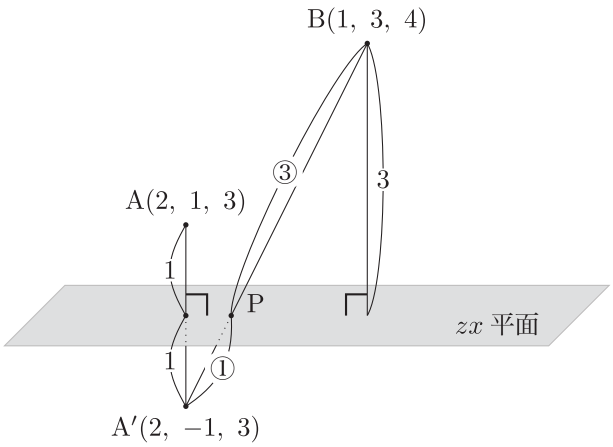
であるから，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ が最小になるのは，点 P が直線 A′B と zx 平面の交点となるときである．このとき，A′ から zx 平面までの距離と B から zx 平面までの距離の比が 1 : 3 であることから， P は線分 A′B を 1 : 3 に内分する点であることがわかるので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{3}{4}(2,\ -1,\ 3)+\frac{1}{4}(1,\ 3,\ 4)\\&=\left(\frac{7}{4},\ 0,\ \frac{13}{4}\right)\end{aligned}$$

より $\mathbf{P}\left(\mathbf{\frac{7}{4},\ 0,\ \frac{13}{4}}\right)$ である．また，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ の最小値は A′B の長さに等しいので，その最小値は

$$\sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2+(4-3)^2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

である．



(2) 点 A と点 B は yz 平面に関しても同じ側にある．ここで，yz 平面に対する点 B の対称点を B′ とすると，B′(−1, 3, 4) であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{BQ}&=\mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{B'Q}\\&\geqq \mathrm{A'B'}\end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{BQ}$ が最小になるのは，P が直線 $\mathrm{A'B'}$ と zx 平面の交点，Q が直線 $\mathrm{A'B'}$ と yz 平面の交点となるときである．したがって，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{BQ}$ の最小値は $\mathrm{A'B'}$ の長さに等しいので，その最小値は

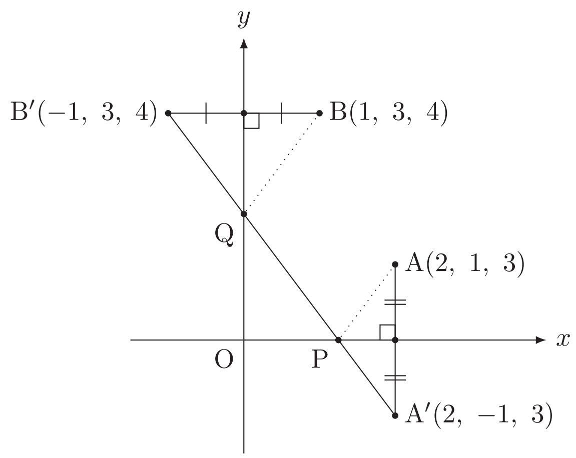
$$\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2+(4-3)^2}=\boldsymbol{\sqrt{26}}$$

である．また，直線 $\mathrm{A'B'}$ 上にある点 R は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\\&=(2,\ -1,\ 3)+t(-3,\ 4,\ 1)\\&=(2-3t,\ -1+4t,\ 3+t)\end{aligned}$$

と表される．点 P は点 R の y 座標が 0 となるときなので，$t=\dfrac{1}{4}$ を代入して，$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{4},\ 0,\ \dfrac{13}{4}}\right)$，点 Q は点 R の x 座標が 0 となるときなので，$t=\dfrac{2}{3}$ を代入して，$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{0,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{11}{3}}\right)$ である．

　下図は，z 軸正の方向から見た図である．



的中!!

冬期講習テキスト

空間に定点 $\mathrm{A}(-4,\ 3,\ 5)$，$\mathrm{B}(6,\ -2,\ 3)$ と平面 $z=-1$ 上を動く点 P がある．線分 AP の長さと線分 PB の長さの和 $\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ．

〔3〕 e は自然対数の底とし，$a,\ b$ は実数定数とする。座標平面内の曲線

$$C : y = f(x) = \frac{e^{x-a} + e^{-x+a}}{2} + b$$

および直線

$$L : y = g(x) = x$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x)$ を求めよ。

必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ が成り立つことを用いてよい。

(2) C と L が接するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(3) C と L が相異なる 2 点で交わるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

解答

(1) $h(x) = \dfrac{e^{x-a} + e^{-x+a}}{2} + b - x$ である.

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x-a}\left(\frac{1+e^{-2x+2a}}{2} + \frac{b}{e^{x-a}} - \frac{x}{e^x}e^a\right)$$

において，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{x-a} = \infty$ であり，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+e^{-2x+2a}}{2} + \frac{b}{e^{x-a}} - \frac{x}{e^x}e^a\right)\\ &= \frac{1+0}{2} + 0 - 0\cdot e^a = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ である.

また，$x = -u$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{u\to\infty}\left(\frac{e^{-u-a} + e^{u+a}}{2} + b + u\right)\\ &= \infty\end{aligned}$$

である.

(2) C と L が $x = t$ に対応する点で接するための条件は，

$$f(t) = g(t),\quad f'(t) = g'(t)$$

という連立方程式が解をもつことである．これらは

$$h(t) = 0 \cdots ①,\quad h'(t) = 0 \cdots ②$$

と言い換えられる．$e^{t-a} = T\ (T > 0)$ とおくと ② から

$$\begin{aligned}\frac{e^{t-a} - e^{-t+a}}{2} - 1 = 0 &\iff T - \frac{1}{T} - 2 = 0\\ &\iff T^2 - 2T - 1 = 0\\ &\iff T = e^{t-a} = 1 + \sqrt{2}\quad (\because T > 0)\\ &\iff t = a + \log(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

これらを ① へ代入して

$$h(t)=0 \iff \frac{1+\sqrt{2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}{2}+b-\{a+\log(1+\sqrt{2})\}=0$$
$$\iff \boldsymbol{a-b=\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})}$$

(3)　$h'(x)=0$ の解は (2) の t である．また，(1) の極限も考慮すると $h(x)$ の増減は以下の通り．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	t	$\cdots$	(∞)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	(∞)	$\searrow$	$h(t)$	$\nearrow$	(∞)

C と L が相異なる 2 点で交わるための条件は，方程式 $h(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから，$h(t)<0$ であればよいので

$$\boldsymbol{a-b>\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})}$$

注釈

$y=f(x)$ のグラフは，懸垂線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ を x 軸，y 軸方向にそれぞれ a, b だけ平行移動したものである．これと直線 $y=g(x)=x$ とが接するときの条件が (2) で得られた結果なので，懸垂線の位置を考えれば (3) の結果も導ける．

〔4〕 xy 平面上で点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，

$$x = r, \quad y = \sin\theta\cos^2 r + \sin\theta\cos r + 1$$

を満たしながら動くものとする。 $r,\ \theta$ は実数として，次の問いに答えよ。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ かつ $0 \leqq r \leqq \pi$ を満たしながら r が変化するとき，
点 P の描く曲線を求め図示せよ。

(2) $\dfrac{\pi}{4} \leqq r \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら $r,\ \theta$ が変化するとき，
点 P が動く領域の面積を求めよ。

解答

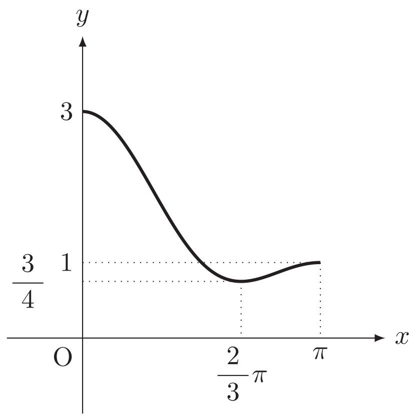
(1) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$r = x$ を代入することにより，
$y = \cos^2 x + \cos x + 1\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ が得られる．

$$\begin{aligned} y' &= -2\cos x\sin x - \sin x \\ &= -\sin x(2\cos x + 1) \end{aligned}$$

であるので，増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
y'	0	$-$	0	$+$	0
y	3	$\searrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\nearrow$	1

したがって，点 P の描く曲線は以下のようになる．



(2) $r = x$ を代入することにより，
$y = \sin\theta(\cos^2 x + \cos x) + 1\ \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が得られる．
ここで，$f(x) = \cos^2 x + \cos x$ とすると，$f'(x) = -\sin x(2\cos x + 1)$ であり，増減表は以下のようになる．

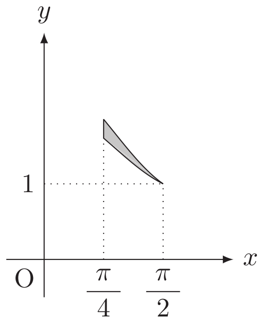
x	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\searrow$	0

したがって，$f(x) \geqq 0$ であり，$\dfrac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であることから，

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos x) + 1 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x + \cos x) + 1$$

が得られる．

よって，点 P が動く領域は以下のグラフの灰色部分である．



求める面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x + \cos x) + 1 - \frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos x) - 1 \right\} dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}-1}{2}(\cos^2 x + \cos x) dx \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x + 2\cos x) dx \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{4} \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x + 2\sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + 0 + 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \sqrt{2} \right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{16}(\pi + 6 - 4\sqrt{2})}
\end{aligned}
$$

解説動画公開中!!
https://youtu.be/aGpcG3dNjQ8

講評

〔1〕［数列の極限］（標準〜やや難）
漸化式で定義された数列の極限について考える問題．誘導が丁寧なのでしっかり乗りたいところである．なお，この数列は一般項 a_n を求めることも可能であるので，一般項を求めることにより最後の極限だけでも解答可能である．

〔2〕［空間座標］（標準〜やや難）
折れ線の長さの最小値について考える問題である．典型題であり，作業量も多くはない．ここは完答がほしい．

〔3〕［数学Ⅲの微積分］（標準〜やや難）
懸垂線を平行移動したグラフと直線との位置関係について問う問題であった．$h(x)$ の意味するところをうまく汲み取りたい．

〔4〕［数学Ⅲの微積分］（標準〜やや難）
媒介変数表示された曲線のように書かれているが，実際 $x=r$ であるのでそのまま代入して考えればよい．積分計算も複雑ではない．

昨年まで 100 分大問 5 題の出題が続いていたが，今年は 90 分大問 4 題の出題となった．すべての大問が「標準〜やや難」レベルの出題であり，難問はないが易問もないセットであった．実力差が点数の差として大いに表れるだろう．2 題完答，2 題半答くらいを目指したい．目標は 70%

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ

メルマガ無料登録で全教科配信！ 本解答速報の内容に関するお問合せは… メビオ 0120-146-156 まで

医学部進学予備校メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 YMS ☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
登録はこちらから

後期入試もチャンスあり！最後まで諦めない受験生をメビオは応援します

医学部後期模試
2/16(金) 近畿大学医学部
2/19(月) 金沢医科大学
詳しくはこちら

私立医学部 2024年度 一般選抜直前対策
後期攻略講座
金沢医科大学
近畿大学医学部
久留米大学医学部
関西医科大学
お申込はお電話 HP・QR コードより承ります

詳しくは Web またはお電話で

医学部進学予備校メビオ 0120-146-156 校舎にて個別説明会も随時開催しています。【受付時間】9:00〜21:00（土日祝可）
大阪府大阪市中央区石町 2-3-12 ベルヴォア天満橋 天満橋駅（京阪/大阪メトロ谷町線）より徒歩3分