医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

藤田医科大学（前期）　数学

2024年2月4日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1)　5 個のさいころを投げて出た目の 5 つの数字を左から小さい順に並べるとき，1 番左の数字が 3 以下である確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ であり，左から 2 番目の数字が 3 以下である確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である。

(2)　2024^2 の正の約数の個数は $\boxed{ケコ}$ 個である。

(3)　xy 平面上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 8)$, $\mathrm{B}(0,\ 98)$ と動点 $\mathrm{P}\ (p,\ 0)$ がある。
$p>0$ の範囲で点 P が動くとき，$\angle\mathrm{APB}$ は $p=\boxed{サシ}$ のとき最大となる。

(4)　実数 a に対して xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(a,\ a^2)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OAB}$ の内心の座標が $(0,\ 380)$ のとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ の内接円の半径は $\boxed{スセ}$ である。

(5)　実数 $x,\ y,\ z$ に対して $x+y+z=\sqrt{3}+2,\ xy+yz+zx=5,\ xyz=10$ のとき，
$x^3+y^3+z^3=\boxed{ソタ}$ である。

(6)　実数 $x,\ y$ に対して $x\leqq y$ のとき，$x^2+2y^2-8x-4y+9$ の最小値は $\boxed{チツ}$ である。

(7)　$\displaystyle\int_{-5}^{7}\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}\,dx=\boxed{テトナ}$ である。

(8)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{A}(5-i)$, $\mathrm{B}(-4+6i)$ に対して，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\pi$ である。
ただし $0<\angle\mathrm{AOB}<\pi$，i は虚数単位とする。

(9)　$a=\log_{0.1}3$ のとき $0.0001^a=\boxed{ネノ}$ である。

(10)　関数 $y=\sin x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ とするとき，微分係数 $f'\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)=\dfrac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒ}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}$	$\dfrac{31}{32}$
$\dfrac{\text{オカ}}{\text{キク}}$	$\dfrac{13}{16}$
ケコ	63
サシ	28
スセ	19
ソタ	26

解答記号	正解
チツ	-3
テトナ	153
$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$	$\dfrac{3}{4}$
ネノ	81
$\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$	$\dfrac{4}{3}$

解説

(1)　1 番左の数字が 3 以下であることは，3 以下の目が少なくとも 1 回出ることと同値であるので，その確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\mathbf{\frac{31}{32}}$$

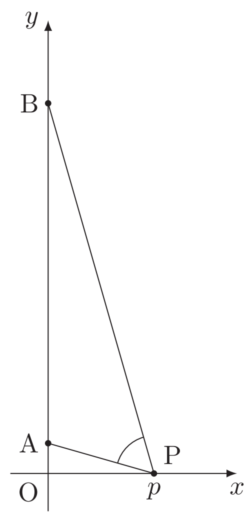
左から 2 番目の数字が 3 以下であることは，3 以下の目が少なくとも 2 回出ることと同値であるので，その確率は

$$1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}=\mathbf{\frac{13}{16}}$$

(2)　$2024^2=2^6\cdot 11^2\cdot 23^2$ であるので正の約数の個数は $(6+1)(2+1)(2+1)=\mathbf{63}$ 個である．

(3)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$ とし，$\angle\mathrm{OPA}=\alpha,\ \angle\mathrm{OPB}=\beta$ とすると，$\tan\alpha=\dfrac{8}{p},\ \tan\beta=\dfrac{98}{p}$ である．

$$\begin{aligned}\tan\angle\mathrm{APB}&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\dfrac{98}{p}-\dfrac{8}{p}}{1+\dfrac{98}{p}\cdot\dfrac{8}{p}}\\&=\frac{90}{p+\dfrac{784}{p}}\\&\leqq\frac{90}{2\sqrt{p\cdot\dfrac{784}{p}}}\\&=\frac{45}{28}\end{aligned}$$



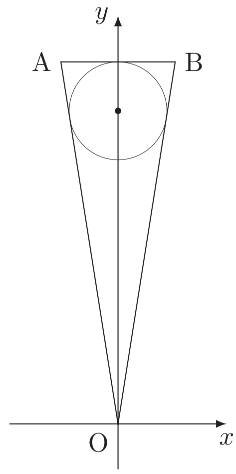
であり，等号が成り立つのは $p=\dfrac{784}{p}\iff p=28$ であるので，$p=\mathbf{28}$ のときに最大となる．

別解

A, B, P を通る円を考えると，$\angle\mathrm{APB}$ は弦 AB に対する円周角となる．この円の半径が最も小さくなるとき $\angle\mathrm{APB}$ が最大となるが，それは円が x 軸に接するときである．この円の中心 C は線分 AB の垂直二等分線上にあるので， $\mathrm{C}(p,\ 53)$ と表せる．$\mathrm{AC}=\mathrm{PC}$ であればよいので，$\sqrt{p^2+45}=53\iff p=\pm 28$．$p>0$ であるので，$p=\mathbf{28}$ のとき最大となる．

(4)　直線 AB の方程式は $y=a^2$, 直線 OB の方程式は $y=ax$ である．それぞれの直線と $(0,\ 380)$ との距離（こ

れが内接円の半径である）が等しいので，内接円の半径を r とすると，$r = a^2 - 380 = \dfrac{380}{\sqrt{a^2+1}}$．これより a を消去すると，



$$
\begin{aligned}
& 380 = r\sqrt{r+381} \\
\iff & r^3 + 381r^2 - 380^2 = 0 \\
\iff & (r-19)(r+20)(r+380) = 0 \\
\iff & r = 19,\ -20,\ -380
\end{aligned}
$$

$r > 0$ であるので，$r = \mathbf{19}$.

注釈

$r^3 + 380r^2 + r^2 - 380^2 = 0$ と変形すると，因数 $r + 380$ を見つけやすい．

(5) x, y, z が与えられた条件式を満たすとき，x, y, z のうち 1 つは実数で 2 つは虚数となるため（理由は後述），問題文の「実数 x, y, z に対して」に反する．したがって題意を満たす x, y, z は存在しないことになるが，以下では，x, y, z が複素数の範囲であるとしたときを考えておく（先の解答一覧表でも，この前提に立った答としている）．

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ であり，
$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$ なので，

$$
\begin{aligned}
& x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\
&= (x+y+z)\{(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)\} \\
&= (\sqrt{3}+2)\{(\sqrt{3}+2)^2 - 3\cdot 5\} \\
&= (\sqrt{3}+2)(4\sqrt{3}-8) \\
&= 4(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2) \\
&= 4(3-4) = -4
\end{aligned}
$$

よって，$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz - 4 = \mathbf{26}$.

別解

解と係数の関係より，x, y, z は $t^3 - (\sqrt{3}+2)t^2 + 5t - 10 = 0$ の 3 解であり，

$$
\begin{cases}
x^3 - (\sqrt{3}+2)x^2 + 5x - 10 = 0 \\
y^3 - (\sqrt{3}+2)y^2 + 5y - 10 = 0 \\
z^3 - (\sqrt{3}+2)z^2 + 5z - 10 = 0
\end{cases}
$$

が成り立つ．これらを辺々加えると，$x^3 + y^3 + z^3 = (\sqrt{3}+2)(x^2+y^2+z^2) - 5(x+y+z) + 30$ が得られる．以降は同様．

注釈

冒頭で述べたように，与えられた条件式を満たす実数 x, y, z は存在しない．その理由は以下の通りである．

上の別解における ① の左辺を $f(t)$ とおく．$f'(t) = 3t^2 - 2(\sqrt{3}+2)t + 5$ となるが，この判別式を D とすると

$$
\frac{D}{4} = (\sqrt{3}+2)^2 - 15 = 4\sqrt{3} - 8 < 0
$$

であるから，常に $f'(t) > 0$ である．したがって $f(t)$ は単調増加であり，方程式 ① の実数解は重解でないただ 1 つとなり，それ以外に共役な 2 つの虚数解をもつことがわかる．

以上により，与えられた条件式を満たす実数 $x,\ y,\ z$ は存在せず，問題文の仮定が偽となるため，$\boxed{\text{ソタ}}$ が任意の値であっても問題文は真の命題となる．

(6) $x^2+2y^2-8x-4y+9=k$ とおくと，$(x-4)^2+2(y-1)^2=k+9$ となる．k がとり得る値の範囲を求めるには，この楕円が $y \geqq x$ で表される領域と共有点をもつ条件を考えればよい．楕円と直線 $y=x$ から y を消去すると $3x^2-12x+9-k=0$．これが実数解をもつとき（つまり楕円と直線が共有点をもつとき），

$$\frac{\text{（判別式）}}{4}=6^2-3(9-k) \geqq 0 \iff k \geqq -3$$

となるから，求める最小値は $\mathbf{-3}$ である．

(7) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4=(x-1)^2(x+2)^2$ より，$x-1=t$ と置換すると，

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_{-5}^{7} |(x-1)(x+2)|dx \\
&= \int_{-6}^{6} |t(t+3)|dt \\
&= \int_{-6}^{-3} t(t+3)dt - \int_{-3}^{0} t(t+3)dt + \int_{0}^{6} t(t+3)dt \\
&= \left\{ \int_{-6}^{-3} t(t+3)dt + \int_{-3}^{0} t(t+3)dt + \int_{0}^{6} t(t+3)dt \right\} - 2\int_{-3}^{0} t(t+3)dt \\
&= \int_{-6}^{6} t(t+3)dt - 2\int_{-3}^{0} t(t+3)dt \\
&= 2\int_{0}^{6} t^2 dt + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3^3 \\
&= 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^6 + 9 \\
&= \mathbf{153}
\end{aligned}$$

(8) $\alpha=5-i,\ \beta=-4+6i$ とすると，

$$\frac{\beta-0}{\alpha-0}=\frac{-4+6i}{5-i}=-1+i$$

より $\arg\left(\dfrac{\beta-0}{\alpha-0}\right)=\dfrac{3}{4}\pi+2n\pi$（$n$ は整数）がわかるので，$\angle\mathrm{AOB}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi}$.

$\boxed{\text{別解}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(5,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-4,\ 6)$ とすると，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{5\cdot(-4)+(-1)\cdot 6}{\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{13}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．したがって $\angle\mathrm{AOB}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi}$.

(9) $a=\log_{0.1}3 \iff 0.1^a=3$．よって，$0.0001^a=(0.1^4)^a=(0.1^a)^4=3^4=\mathbf{81}$.

(10) $y=f(x) \iff x=\sin y$，また，$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$ となることに注意して，

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

よって，$f'\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{7}{16}}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$.

注釈

$x = \sin y$ の両辺を x で合成関数微分（陰関数微分）して $1 = \cos y \cdot \dfrac{dy}{dx}$ としてもよい.

問題 2

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1,\ na_{n+1} = 3\sum_{k=1}^{n} a_k\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ を求めよ。

解答

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{na_{n+1}}{3} \cdots$ ① であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{na_{n+1}}{3} - \frac{(n-1)a_n}{3}$$
$$\iff na_{n+1} = (n+2)a_n$$

これは ① より $n = 1$ のときも成り立つ．この両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} = \frac{a_n}{(n+1)n}$$

となるので，

$$\frac{a_n}{(n+1)n} = \frac{a_{n-1}}{n(n-1)} = \cdots = \frac{a_1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

である．したがって

$$\frac{a_n}{(n+1)n} = \frac{1}{2} \iff a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

となる．

(2)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}{\frac{1}{2}n(n+1) \cdot \frac{1}{2}(n+2)(n+3)} \\
&= 2 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+3)} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{2}{3} \lim_{N\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \right. \\
&\qquad \left. \cdots + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N+1}\right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+2}\right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+3}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{6}$$
$$= \boldsymbol{\frac{11}{9}}$$

問題 3

xy 平面において原点を O とし，点 A の座標を (1, 0)，点 B の座標を (1, 1) とする。点 P が，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (t^2+2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + st\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を領域 D とする。次の問いに答えよ。

(1)　領域 D を xy 平面に図示せよ。

(2)　領域 D の面積を求めよ。

(3)　領域 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答

(1)　点 P の座標を $(X,\ Y)$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (t^2+2t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + st\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (t^2+2t,\ 0) + (st,\ st) = (t^2+2t+st,\ st)$$

より

$$\begin{cases} X = t^2+2t+st & \cdots ① \\ Y = st & \cdots ② \end{cases}$$

である．

$0 \leqq s \leqq 1$ の辺々に t をかけると $0 \leqq st \leqq t$ より $0 \leqq Y \leqq t$．よって，$0 \leqq Y \leqq t \leqq 1$ である．

①② より $t^2+2t+Y-X=0$ なので，この t についての 2 次方程式が $0 \leqq Y \leqq t \leqq 1$ で解を持つ条件を求める．

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2+2t+Y-X \\ &= (t+1)^2-1+Y-X \end{aligned}$$

とおくと，軸が $t=-1$ であることから，

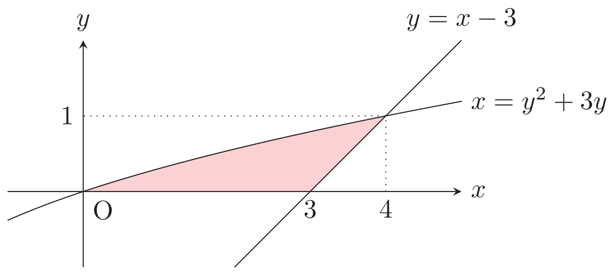
$$Y \geqq 0 \text{ かつ } f(Y) \leqq 0 \text{ かつ } f(1) \geqq 0$$

となればよいので，

$$Y \geqq 0 \text{ かつ } Y^2+3Y-X \leqq 0 \text{ かつ } 3+Y-X \geqq 0$$

となる．

以上で得られた $y \geqq 0,\ x \geqq y^2+3y,\ y \geqq x-3$ を図示すると以下のようになる（境界上の点も含む）．



別解

パラメータを明示して $s,\ t$ に対する P を $\mathrm{P}_{s,t}$ と書くことにする．

ある t を $0 \leqq t \leqq 1$ で固定して s を $0 \leqq s \leqq 1$ で変化させると，$\mathrm{P}_{s,t}$ は $\mathrm{P}_{0,t}(t^2+2t,\ 0)$ と $\mathrm{P}_{1,t}(t^2+3t,\ t)$ をつなぐ傾き 1 の線分上を動く．この線分の $0 \leqq t \leqq 1$ に対する通過領域を考えればよい．

t を 0 から 1 まで変化させると $\mathrm{P}_{0,t}(t^2+2t,\ 0)$ は x 軸上を (0, 0) から (3, 0) まで移動する．その際 $\mathrm{P}_{0,t}(t^2+2t,\ 0)$ の x 座標は単調に増加する．

また，t を 0 から 1 まで変化させると $\mathrm{P}_{1,t}(t^2+3t,\ t)$ は放物線 $x=y^2+3y$ 上を (0, 0) から (4, 1) まで移動する．その際 $\mathrm{P}_{1,t}(t^2+3t,\ t)$ の x 座標は単調に増加する．

したがって $\mathrm{P}_{s,t}$ の存在範囲は，x 軸の $0 \leqq x \leqq 3$ の部分，$x = y^2 + 3y$ の $0 \leqq x \leqq 4$ の部分，$(3,\ 0)$ と $(4,\ 1)$ を結ぶ線分で囲まれた領域であることがわかる．

(2) 求める面積を S とする．$(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$, $(4,\ 1)$ をつないでできる三角形の面積は $\dfrac{3}{2}$．また $(0,\ 0)$, $(4,\ 1)$ をつなぐ線分と放物線の囲む面積は $\dfrac{1}{6}(1-0)^3 = \dfrac{1}{6}$．したがって $S = \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{2} = \boldsymbol{\dfrac{5}{3}}$．

(3) 放物線 $x = y^2 + 3y$ を y に関して解くと，$y \geqq 0$ より $y = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{x + \dfrac{9}{4}}$．

$(3,\ 0)$, $(4,\ 0)$, $(4,\ 1)$ をつないでできる三角形を回転してできる円錐の体積は $\dfrac{1}{3}\pi$ だから，求める体積を V とすると，

$$
\begin{aligned}
V + \frac{1}{3}\pi &= \pi \int_0^4 \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}} \right)^2 dx \\
&= \pi \int_0^4 \left(\frac{9}{4} + x + \frac{9}{4} - 3\sqrt{x + \frac{9}{4}} \right) dx \\
&= \pi \left[\frac{9}{2}x + \frac{x^2}{2} - 2\left(x + \frac{9}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\
&= \pi \left\{ 18 + 8 - 2\left(\frac{5}{2} \right)^3 + 2\left(\frac{3}{2} \right)^3 \right\} \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

したがって $V = \dfrac{3}{2}\pi - \dfrac{1}{3}\pi = \boldsymbol{\dfrac{7}{6}\pi}$.

別解

y 軸方向の円筒型積分（バウムクーヘン分割）で計算すると

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \left\{ (y+3) - (y^2 + 3y) \right\} \cdot 2\pi y dy \\
&= 2\pi \int_0^1 (-y^3 - 2y^2 + 3y) dy \\
&= 2\pi \left[-\frac{y^4}{4} - \frac{2}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 \right]_0^1 \\
&= 2\pi \left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) \\
&= \boldsymbol{\frac{7}{6}\pi}
\end{aligned}
$$

講評

問題 1［小問集合］

((1) 標準 (2) 易 (3) やや難 (4) やや難 (5) 標準 (6) 標準 (7) 標準 (8) やや易 (9) 易 (10) やや難)

方針が立ったとしても計算が面倒な問題が散在しており，そこに苦戦した受験生は多かったと思われる．

平易な問題をなるべく取りこぼしなく乗り切って，面倒な問題たちでどれだけ正解をもぎとれたかの勝負だろう．

(4)　いろいろな解法が考えられるが，いずれにしても係数が非常に大きな値となる 3 次方程式を解くことになる．

(7)　適当な置き換えなどにより要領よく計算できるとよい．

(10)　典型的な逆関数の問題ではあるが，解いた経験がないと厳しいだろう．

問題 2［数列］（標準）

数列の和を含む漸化式から一般項を求める問題であった．数列の和から一般項を求めるのは基本的であるが，その発想ができたとしても得られた漸化式の両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割る，と発想できたかどうかで差がつきそうである．(1) が解ければ (2) は部分分数分解を行って和を求めるだけであるから，(1) の成否が総得点に大きく影響しそうである．

問題 3［媒介変数で表された点の存在領域, 数学Ⅲの積分］（難）

媒介変数で表された点の存在領域の問題であるが，媒介変数が 2 つであるため非常に難しい．感覚的に領域が把握できれば先に進めるだろうが，(1) ができないと全滅してしまう設定になっている．(1) さえできれば (2), (3) は標準的な面積，体積問題なので，この問題ができた人のリードは大きい．

2023 年度前期と比較すると，問題 1 はやや難化，問題 2 は易化，問題 3 は同程度の難易度であった．問題 3 で得点するのは簡単ではなく，問題 1，2 でどれだけとれたかの勝負だろう．

1 次合格のための目標は 60%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ