医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

藤田医科大学(後期)　数学

2024年3月3日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1) a を定数項とする多項式 $x^2+xy-6y^2-x+7y+a$ が 1 次式の積に因数分解できるとき，$a=$ $\boxed{アイ}$ である。

(2) N を $200 \leqq N \leqq 299$ を満たす整数とするとき，N と N^2 の下 2 桁が一致する最大の N は $\boxed{ウエオ}$ である。

(3) n を 3 以上の整数とする。1 個のサイコロを n 回投げるとき，3 以下の目が出る回数が $(n-2)$ 回以上となる確率が 0.01 を下回る最小の n は $\boxed{カキ}$ である。

(4) $\triangle$ABC において 3 辺の長さが $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{BC}=2$, $\mathrm{CA}=1+\sqrt{6}$ であるとき，$\angle\mathrm{ABC}=\boxed{クケコ}^\circ$ である。

(5) $(7\cos\theta+5\sin\theta)(7\sin\theta-5\cos\theta)$ の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値は $\boxed{サシ}$，最小値は $\boxed{スセソ}$ である。

(6) ベクトル $\vec{a}$ が，2 つのベクトル $\vec{b}=(1,\ -3,\ 1)$, $\vec{c}=(3,\ -1,\ -2)$ の両方に垂直であり，ベクトル $\vec{d}=(5,\ -3,\ -2)$ との内積が 4 のとき，$\vec{a}=(\boxed{タ},\ \boxed{チ},\ \boxed{ツ})$ である。

(7) i を虚数単位とするとき，$\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i}}=\cos\dfrac{\pi}{\boxed{テト}}+i\sin\dfrac{\pi}{\boxed{ナニ}}$ である。

(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(k+\frac{1}{k}+2\right)-\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=12$ のとき，$n=\boxed{ヌネ}$ である。

(9) $-1<x<1$ で定義される関数 $f(x)$ の第 2 次導関数が存在し，$x^5+(x+1)\{f(x)\}^3=27$ が満たされるとき，$f(0)=\boxed{ノ}$, $f'(0)=\boxed{ハヒ}$, $f''(0)=\dfrac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘ}}$ である。

(10) 実数全体で定義される関数 $f(x)$ が $f(x)=x^3-\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(t)\}^3dt$ を満たすとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}$ である。

解答

解答記号	正解
アイ	-2
ウエオ	276
カキ	14
クケコ	135
サシ	37
スセソ	-35
タ，チ，ツ	7，5，8

解答記号	正解
テト，ナニ	24，24
ヌネ	63
ノ	3
ハヒ	-1
$\dfrac{\text{フ}}{\text{ヘ}}$	$\dfrac{4}{3}$
$\dfrac{\text{ホ}}{\text{マ}}$	$\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$x^2+xy-6y^2=(x+3y)(x-2y)$ と変形できるので，与多項式が 1 次式の積に因数分解できるとき，

$$x^2+xy-6y^2-x+7y+a=(x+3y+p)(x-2y+q)$$

とおくことができる（ただし p，q は実数）．
(右辺) $=(x+3y)(x-2y)+(p+q)x+(-2p+3q)y+pq$ であるので，左辺と比較して

$$\begin{cases} p+q=-1\cdots① \\ -2p+3q=7\cdots② \\ pq=a\cdots③ \end{cases}$$

①，② より $p=-2$，$q=1$ を得るので，③ に代入して，$a=\mathbf{-2}$ となる．

別解

$x^2+(y-1)x-6y^2+7y+a=0$ を x の 2 次方程式として解いた解が y の 1 次式となればよい．
解の公式より，

$$x=\frac{-y+1\pm\sqrt{25y^2-30y-4a+1}}{2}$$

であるので，根号の内部が y の完全平方式となればよい．
したがって，$25y^2-30y-4a+1=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=225-25(-4a+1)=0$$

であるから，これを解いて $a=\mathbf{-2}$ となる．

(2)　N と N^2 の下 2 桁が一致するための必要十分条件は，$N^2-N=N(N-1)$ が 100 の倍数となることである．N と $N-1$ は互いに素であり，$100=2^2\cdot 5^2$ と素因数分解できることから，N と $N-1$ のいずれかが 25 の倍数となることが必要である．よって，$200\leqq N\leqq 299$ より N または $N-1$ がとり得る値の候補は 200, 225, 250, 275 に限られる．これらの候補の中で N が最大となるのは $N-1=275 \iff N=276$ のときであるが，このとき N が 4 の倍数，$N-1$ が 25 の倍数となるため，$N(N-1)$ が 100 の倍数となり，題意を満たす．したがって，$N=\mathbf{276}$ である．

(3)　3 以下の目が出る回数が $(n-2)$ 回以上となる確率を P_n とすると，

$$P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{n^2+n+2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ここで

$$P_{n+1}-P_n=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{n^2+n+2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$=-n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}<0\quad(\because n\geqq 3)$$

となるので，$\{P_n\}$ は単調に減少することに注意する．
$P_n<0.01$ より

$$\frac{n^2+n+2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}<\frac{1}{100}$$
$$\iff 100(n^2+n+2)<2^{n+1}$$

であり，$f(n)=100(n^2+n+2)$，$g(n)=2^{n+1}$ とおくと，

$$f(13)=18400,\ g(13)=16384$$
$$f(14)=21200,\ g(14)=32768$$

となるので，

$$1\leqq n\leqq 13 \text{ のとき } f(n)>g(n),\ 14\leqq n \text{ のとき } f(n)<g(n)$$

となる．したがって，最小の n は **14** である．

(4)　余弦定理を用いて，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{(\sqrt{3})^2+2^2-(1+\sqrt{6})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 2}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

より，$\angle\mathrm{ABC}=\mathbf{135^\circ}$．

(5)　与えられた式を $f(\theta)$ とすると，$f(\theta)$ は次のように変形できる．

$$f(\theta)=(7\cos\theta+5\sin\theta)(7\sin\theta-5\cos\theta)$$
$$=35\sin^2\theta+24\sin\theta\cos\theta-35\cos^2\theta$$
$$=24\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta-35(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=12\sin 2\theta-35\cos 2\theta$$
$$=37\sin(2\theta+\alpha)\qquad\left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{12}{37},\ \sin\alpha=-\frac{35}{37}\right)$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ であるから，α を $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ を満たす角度であると考えると，$f(\theta)$ は $2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，つまり $\theta=\dfrac{\pi-2\alpha}{4}$ のときに最大値 **37** をとり，$2\theta+\alpha=\alpha$ のとき，つまり $\theta=0$ のときに最小値 **−35** をとる．

別解

$f(\theta)$ を変形する過程については，次のようにも考えられる．

$$f(\theta)=(7\cos\theta+5\sin\theta)(7\sin\theta-5\cos\theta)$$

$$= (7\cos\theta + 5\sin\theta)\left\{7\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 5\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \sqrt{74}\sin(\theta+\beta)\cdot\sqrt{74}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \beta\right) \quad \left(\text{ただし，}\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{74}},\ \sin\beta = \frac{7}{\sqrt{74}}\right)$$

$$= -74\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\beta)$$

$$= -37\sin(2\theta+2\beta)$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $2\beta \leqq 2\theta + 2\beta \leqq \pi + 2\beta$ であるから，β を $\dfrac{\pi}{2} < 2\beta < \pi$ を満たす角度であると考えると，$f(\theta)$ は $2\theta + 2\beta = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，つまり $\theta = \dfrac{3}{4}\pi - \beta$ のときに最大値 $\mathbf{37}$ をとり，$2\theta + 2\beta = 2\beta$ のとき，つまり $\theta = 0$ のときに最小値 $\mathbf{-35}$ をとる．

(6) $\overrightarrow{a} = (x,\ y,\ z)$ とおくと，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0$ かつ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = 0$ であることから，

$$x - 3y + z = 0,\ 3x - y - 2z = 0$$

が成り立つ．この連立方程式から，$x,\ y$ はそれぞれ z を用いて

$$x = \frac{7}{8}z,\ y = \frac{5}{8}z$$

と表される．よって，$\overrightarrow{a}$ は $\overrightarrow{a} = (x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{7}{8}z,\ \dfrac{5}{8}z,\ z\right) = (7k,\ 5k,\ 8k)$ $\left(\text{ここで，}k = \dfrac{1}{8}z\text{ とおいた．}\right)$

と表され，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d} = 4$ の条件から $35k - 15k - 16k = 4 \iff k = 1$ を得るので，$\overrightarrow{a} = (\mathbf{7},\ \mathbf{5},\ \mathbf{8})$ と定まる．

$\boxed{\text{別解}}$

$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ の外積は，$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c} = (7,\ 5,\ 8)$ であるので，同様に求めることができる．

(7) $z = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i}}$ とおくと，

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

したがって $z = \cos\left(\dfrac{\pi}{24} + k\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{24} + k\pi\right)$ $(k = 0,\ 1)$ である．

つまり $z = \cos\dfrac{\pi}{24} + i\sin\dfrac{\pi}{24}$ または $z = \cos\dfrac{25\pi}{24} + i\sin\dfrac{25\pi}{24}$ ということになるのだが，解答欄に適合する答えは $z = \cos\dfrac{\pi}{\mathbf{24}} + i\sin\dfrac{\pi}{\mathbf{24}}$．

$\boxed{\text{注釈}}$

一般に 0 でない複素数 α に対して $z^2 = \alpha$ となる複素数 z は 2 つ存在し，一方を β で表すと他方は $-\beta$ である．どちらかを $\sqrt{\alpha}$ と決めれば，他方は $-\sqrt{\alpha}$ となるわけであるが，どちらを $\sqrt{\alpha}$ と決めるかに関する明確な約束はない．この問題では $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(z) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす解を $\sqrt{\alpha}$ で表しているものと解釈した．

(8)

$$\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(k + \frac{1}{k} + 2\right) - \sum_{k=1}^{n}\log_2 k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\log_2\left(k + \frac{1}{k} + 2\right) - \log_2 k\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k + \frac{1}{k} + 2}{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{k^2+2k+1}{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \log_2 \left(\frac{k+1}{k} \right)^2 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \{\log_2(k+1) - \log_2 k\} \\
&= 2\{\log_2(n+1) - \log_2 1\} \\
&= 2\log_2(n+1)
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \log_2 \left(k + \frac{1}{k} + 2 \right) - \sum_{k=1}^{n} \log_2 k = 12 \\
\iff& 2\log_2(n+1) = 12 \\
\iff& \log_2(n+1) = 6 \\
\iff& n+1 = 2^6 \\
\iff& n = \mathbf{63}
\end{aligned}
$$

である．

(9)　$x^5 + (x+1)\{f(x)\}^3 = 27 \cdots$ ① とする．

① に $x=0$ を代入すると，$\{f(0)\}^3 = 27$ であり，$f(0)$ は実数であるから，$f(0) = \mathbf{3}$ である．

次に，① の両辺を x で微分すると，

$$5x^4 + \{f(x)\}^3 + (x+1)\cdot 3\{f(x)\}^2 f'(x) = 0 \ \cdots \ ②$$

この式に $x=0$ を代入すると，

$$\{f(0)\}^3 + 3\{f(0)\}^2 f'(0) = 0 \iff 27 + 27f'(0) = 0$$

よって，$f'(0) = \mathbf{-1}$ である．

さらに，② の両辺を x で微分すると，

$$20x^3 + 3\{f(x)\}^2 f'(x) + 3\{f(x)\}^2 f'(x) + 3(x+1)\{2f(x)f'(x)\}f'(x) + 3(x+1)\{f(x)\}^2 f''(x) = 0$$

この式に $x=0$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&3\{f(0)\}^2 f'(0) + 3\{f(0)\}^2 f'(0) + 3\{2f(0)f'(0)\}f'(0) + 3\{f(0)\}^2 f''(0) = 0 \\
\iff& -27 - 27 + 18 + 27f''(0) = 0
\end{aligned}
$$

よって，$f''(0) = \mathbf{\dfrac{4}{3}}$ である．

注釈

② の左辺を x で微分する際に，以下の式を用いた．

u，v，w を x の関数とするとき，uvw を x で微分すると，$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ が成り立つ．

(10)　$k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \{f(t)\}^3 dt$ とおくと，$f(x) = x^3 - k$ であるから，

$$k = \int_{-1}^{1} (t^3 - k)^3 dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} (t^9 - 3t^6k + 3t^3k^2 - k^3)dt \\
&= 2\int_{0}^{1} (-3kt^6 - k^3)dt \\
&= 2\left[-\frac{3}{7}kt^7 - k^3t\right]_0^1 \\
&= -\frac{6}{7}k - 2k^3
\end{aligned}
$$

これより，$k(14k^2 + 13) = 0$ を得るので，$k = 0$ である．したがって，$f(x) = x^3$ であるから，

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

問題 2

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の導関数の定義を述べよ。

(2)　$x>0$ で定義される関数 $f(x)=\sqrt{x}$ を導関数の定義に従って微分せよ。

(3)　実数全体で定義される関数 $f(x)=\sin x$ を導関数の定義に従って微分せよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ は証明なしに用いてよい。

解答

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在するとき，これを関数 $f(x)$ の導関数という（以下これを $f'(x)$ と表す）.

(2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
=\ &\frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

となるので，導関数は存在し $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である.

(3)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\sin x+\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\right)\\
=\ &\lim_{h\to 0}\left(\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}\cdot\sin x+\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\right)\\
=\ &\lim_{h\to 0}\left(-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{\cos h+1}\cdot\sin x+\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\right)\\
=\ &\cos x\quad\left(\because\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\right)
\end{aligned}
$$

となるので，導関数は存在し $f'(x)=\cos x$ である.

別解

和→積の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \\
&= \cos x \qquad \left(\because \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right)
\end{aligned}
$$

となるので，導関数は存在し $f'(x) = \cos x$ である．

問題3

4 個の値からなるデータ

$$11,\ 35,\ -1,\ 7$$

をデータ A とし，5 個の値からなるデータ

$$11,\ 35,\ -1,\ 7,\ x$$

をデータ B とする。ただしデータ A とデータ B の分散は等しく，x は正の数値である。次の問いに答えよ。

(1) データ A の平均値と分散を求めよ。

(2) x の値を求めよ。

(3) 平均値が 1，分散が 15 の 10 個の値からなるデータがある。このデータをデータ B に追加してできる 15 個の値からなるデータをデータ C とした。データ C の平均値と分散を求めよ。

解答

(1) データ A の平均値は $\dfrac{-1+7+11+35}{4}=\mathbf{13}$ である.

データ A の各データを a_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$，平均値を $\overline{a}$ とすると，以下の表を得る.

	a_1	a_2	a_3	a_4	平均値
a	-1	7	11	35	13
$a-\overline{a}$	-14	-6	-2	22	0
$(a-\overline{a})^2$	196	36	4	484	180

したがって，データ A の分散は **180** である.

(2) データ B の平均値は

$$\frac{-1+7+11+35+x}{5}=\frac{x+52}{5}$$

であり，分散はデータ A の分散 180 と等しいことから次の式を得る.

$$\frac{(-1)^2+7^2+11^2+35^2+x^2}{5}-\left(\frac{x+52}{5}\right)^2=180$$

$$\iff \frac{4x^2-104x-224}{25}=0$$

$$\iff (x+2)(x-28)=0$$

$x>0$ であることから，$\boldsymbol{x=28}$ である.

(3) データ B に追加された 10 個のデータを c_k $(k=1,\cdots,\ 10)$ とすると，条件から，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}c_k=1 \iff \sum_{k=1}^{10}c_k=10 \\ \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{10}{c_k}^2-1^2=15 \iff \sum_{k=1}^{10}{c_k}^2=160 \end{cases}$$

を得る. したがって，データ C の平均値は

$$\frac{1}{15}\left(-1+7+11+28+35+\sum_{k=1}^{10}c_k\right)$$

$$=\frac{80+10}{15}$$

$$=\mathbf{6}$$

分散は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{15}\left\{(-1)^2+7^2+11^2+28^2+35^2+\sum_{k=1}^{10}{c_k}^2\right\}-6^2\\
&=\frac{2180+160}{15}-36\\
&=\mathbf{120}
\end{aligned}$$

である.

講評

問題 1［小問集合］
((1) 標準 (2) やや難 (3) 標準 (4) 易 (5) 標準 (6) 易 (7) やや易 (8) やや難 (9) 標準 (10) やや易)

(2), (8) は方針が立てにくかっただろうが，他は易〜標準であり，なるべくとりこぼしなく正解したい．

(2)　「下 2 桁が一致」を「差が 100 の倍数」と言い換えられるかがポイントである．

(5)　展開してもよいが，2 つの因数をそれぞれ合成してもよい．

(8)　$\sum$ 計算など処理力が問われる問題であった．

問題 2［数学Ⅲの極限，微分］(標準)

導関数の定義を述べ，その定義に従って $\sqrt{x}$ と $\sin x$ の導関数を求めるという，実に教科書的な問題であった．2024 年度の推薦入試でも問題 2 において「円周率の定義」が問われるなど，普段何気なく使っている定数や用語についてきちんと定義を知っているかどうかを問われるのは本学での特徴となってきた．この問題は確実に得点しておきたい．

問題 3［データの分析］(標準)

データの平均値と分散についての典型問題であった．計算はやや繁雑なので，処理精度で差がつきそうである．

2024 年度前期と比較すると，全体的に易化しており，特に難度の高い問題はない．計算力を必要とする問題が多く，処理力で差がつくだろう．

1 次合格のための目標は 70%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ