解答速報

関西医科大学(後期)　数学

2024年3月2日実施

I　表裏のある 6 枚のカードを横一列にすべて裏向きで並べる。この 6 枚のカードに対して，次の 3 つの操作を，操作 1，操作 2，操作 3 の順に行う。

・操作 1： 6 枚のカードの中から 1 枚のカードを無作為に選んで裏返す。

・操作 2： 6 枚のカードの中から，隣り合う 2 枚のカードを無作為に選び，これら 2 枚のカードを裏返す。

・操作 3： 6 枚のカードの中から，連続して並ぶ 3 枚のカードを無作為に選び，これら 3 枚のカードを裏返す。

ここで，カードを裏返すとは，表を向いているカードは裏を向け，裏を向いているカードは表を向けることを意味する。以下の確率を求めよ。なお，各設問の答えは既約分数で表すこと。

(1)　操作 2 が終了した時点でちょうど 3 枚のカードが表を向いている確率

(2)　操作 3 が終了した時，6 枚のカードがすべて表を向いている確率

(3)　操作 3 が終了した時，ちょうど 4 枚のカードが表を向いている確率

(4)　操作 3 が終了した時，ちょうど 2 枚のカードが表を向いている確率

解答

6 枚のカードを 1〜6 の数字で表すことにする．

(1)　ある事象の起こる確率は，操作 1，操作 2 の順に行う場合と，操作 2，操作 1 の順に行う場合とで差は生じない．そこでまず操作 2 を行うと考える．

操作 2 でどのカードを選んでも，その結果表を向いているカードは 2 枚である．その 2 枚のカードを a, b とする．この後操作 1 を行って 3 枚のカードが表を向いている状態にするには，次の操作 1 で a, b 以外のカードを裏返せばよい．従ってその確率は $\dfrac{4}{6}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ である．

(2)　やはり操作を，操作 3, 操作 2, 操作 1 の順で行うと考えてもよい．3 回の操作の全事象は $4\times5\times6=120$ 通りあり，これらはすべて同様に確からしい．

操作 3, 操作 2 で裏返すカードの組み合わせ 5×4 通りについて，その結果表を向いているカードが何であるかをすべて表にして表すと，次のようになっている．ここで X は操作 3 で裏返す 3 枚のカードの集合，Y は操作 2 で裏返す 2 枚のカードの集合である．

X ＼ Y	$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{3, 4\}$	$\{4, 5\}$	$\{5, 6\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$	$\{1\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 5, 6\}$
$\{2, 3, 4\}$	$\{1, 3, 4\}$	$\{4\}$	$\{2\}$	$\{2, 3, 5\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$
$\{3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{2, 4, 5\}$	$\{5\}$	$\{3\}$	$\{3, 4, 6\}$
$\{4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 4, 5, 6\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{3, 5, 6\}$	$\{6\}$	$\{4\}$

20 通りの結果のうち，表を向いているカードが 1 枚になっている場合が 8 通りあり，これに操作 1 を施すと，表を向いているカードが 0 枚になる場合の数が $8\times1=8$, 2 枚になる場合の数が $8\times5=40$ であることがわかる．

同様に 20 通りの結果のうち，表を向いているカードが 3 枚になっている場合が 6 通りあり，これに操作 1 を施すと，表を向いているカードが 2 枚になる場合の数が $6\times3=18$, 4 枚になる場合の数が $6\times3=18$ であることがわかる．

また 20 通りの結果のうち，表を向いているカードが 5 枚になっている場合が 6 通りあり，これに操作 1 を施すと，表を向いているカードが 4 枚になる場合の数が $6 \times 5 = 30$, 6 枚になる場合の数が $6 \times 1 = 6$ であることがわかる．

以上により 6 枚のカードがすべて表を向いている確率は $\dfrac{6}{120} = \boldsymbol{\dfrac{1}{20}}$ である．

(3)　(2) の結果より $\dfrac{18+30}{120} = \dfrac{48}{120} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$ である．

(4)　(2) の結果より $\dfrac{40+18}{120} = \dfrac{58}{120} = \boldsymbol{\dfrac{29}{60}}$ である．

II　$0 \leqq x$ の範囲で定義される関数 $f(x) = 2\sqrt{x}$ と $g(x) = \dfrac{6x}{2x+1}$ がある。$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を S とするとき，以下の設問に答えよ。

(1)　S の値を求めよ。

(2)　$0 < S < \dfrac{1}{8}$ であることを示せ。なお必要があれば，自然対数の底 e が $2.71 < e < 2.72$ を満たすことを用いてよい。

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= 2\sqrt{x} - \frac{6x}{2x+1} \\
&= \frac{2\sqrt{x}(2x+1) - 6x}{2x+1} \\
&= \frac{2\sqrt{x}(2x+1-3\sqrt{x})}{2x+1} \\
&= \frac{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{2x+1}
\end{aligned}
$$

となる．よって，

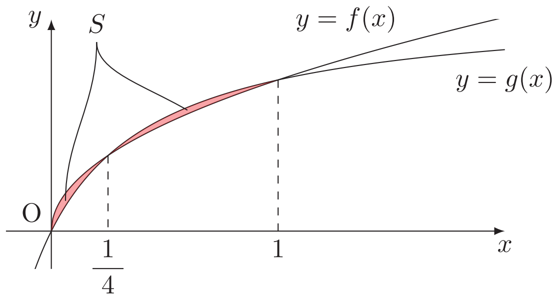
$$
f(x) - g(x) = 0 \iff x = 0,\ \frac{1}{4},\ 1
$$

$$
f(x) - g(x) > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{4},\ 1 < x
$$

$$
f(x) - g(x) < 0 \iff \frac{1}{4} < x < 1
$$

となるので，求める面積 S は，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{1}{4}} \{f(x) - g(x)\}\, dx + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \{g(x) - f(x)\}\, dx \\
&= \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + \frac{3}{2}\log|2x+1|\right]_0^{\frac{1}{4}} + \left[3x - \frac{3}{2}\log|2x+1| - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^{1} \\
&= 2\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\log\frac{3}{2}\right) - 0 + \left(3 - \frac{3}{2}\log 3 - \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} + 3\log\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\log 3 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\log 3 - 2\log\frac{3}{2}\right) \\
&= \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\log\frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$



(2)　面積なので $S>0$ は明らか.[*1] また,

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}-S&=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\log\frac{4}{3}\\&=\frac{3}{2}\log\frac{4}{3}-\frac{3}{8}\\&=\frac{3}{8}\left(4\log\frac{4}{3}-1\right)\\&=\frac{3}{8}\left(\log\frac{256}{81}-\log e\right)\end{aligned}$$

となるが, $\dfrac{256}{81}>3>e$ より $\dfrac{1}{8}-S>0$, すなわち $S<\dfrac{1}{8}$ が成立する.　（証明終）

[*1] そうなるように (1) を立式した.

III　数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和を S_n とする。
$\{a_n\}$ を $a_1 = 2,\ a_{n+1} = S_n - n(n-4)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定めるとき，a_n と S_n をそれぞれ n の式で表せ。

解答

$a_{n+1} = S_n - n(n-4) \cdots$① とする．$n = 1$ を代入することにより $a_2 = S_1 + 3$ となるが，$S_1 = a_1 = 2$ であるから，$a_2 = 5$ である．

以下では $n \geqq 2$ とする．① から $a_n = S_{n-1} - (n-1)(n-5) \cdots$② であるから，① − ② より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= S_n - S_{n-1} - (n^2 - 4n) + (n^2 - 6n + 5) \\ &= a_n - 2n + 5 \end{aligned}$$

となるので，

$$a_{n+1} = 2a_n - 2n + 5 \cdots ③$$

となる．ただし ③ に $n = 1$ を代入すると $a_2 = 2a_1 - 2 + 5 = 4 - 2 + 5 = 7$ なので，先に求めた $a_2 = 5$ に反する．したがって ③ は $n \geqq 2$ でのみ成り立つことに注意しておく．

ここで，$f(n) = pn + q$ とし，

$$f(n+1) = 2f(n) - 2n + 5 \cdots ④$$

が n の恒等式となるような $p,\ q$ を求める．

$$p(n+1) + q = 2(pn + q) - 2n + 5$$

において係数比較により

$$\begin{cases} p = 2p - 2 \\ p + q = 2q + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 2 \\ q = -3 \end{cases}$$

となるので $f(n) = 2n - 3$ である．③ − ④ より

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

である．$a_2 = 5,\ f(2) = 1$ より $a_2 - f(2) = 4$ であるから，$n \geqq 2$ に注意して

$$a_n - f(n) = 2^{n-2}\{a_2 - f(2)\} = 2^{n-2} \cdot 4 = 2^n$$

である．つまり $a_n = 2^n + f(n) = 2^n + 2n - 3$ である．

以上から

$$\boldsymbol{\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2^n + 2n - 3\ (n \geqq 2) \end{cases}}$$

である．また，$n \geqq 1$ で ① が成り立つので，

$$\begin{aligned} S_n &= a_{n+1} + n(n-4) \\ &= 2^{n+1} + 2(n+1) - 3 + n(n-4) \\ &= \boldsymbol{2^{n+1} + n^2 - 2n - 1\ (n \geqq 1)} \end{aligned}$$

である．

別解 1

③ の階差をとると隣接 3 項の漸化式が得られる．$a_3 = 11$ を求めておく．$n \geqq 2$ に対して

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2(n+1) + 5$$

$$a_{n+1} = 2a_n - 2n + 5$$

辺々引いて　　$a_{n+2} - a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 2 \cdots (*)$

これを $a_{n+2} - a_{n+1} - 2 = 2(a_{n+1} - a_n - 2)$ と変形すると，$\{a_{n+1} - a_n - 2\}$　$(n \geqq 2)$ が，公比 2，初項 $a_3 - a_2 - 2 = 4$ の等比数列だとわかる．したがって

$$a_{n+1} - a_n - 2 = 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n \quad (n \geqq 2)$$

また $a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n - 2$ と変形すると $\{a_{n+1} - 2a_n\}$　$(n \geqq 2)$ が，公差 -2，初項 $a_3 - 2a_2 = 1$ の等差数列だとわかる．したがって

$$a_{n+1} - 2a_n = 1 - 2(n-2) = -2n + 5 \quad (n \geqq 2)$$

辺々引くと $a_n - 2 = 2^n + 2n - 5$ つまり $a_n = 2^n + 2n - 3$　$(n \geqq 2)$ である．（以下略）

別解 2

（$(*)$ 以降について）$a_{n+1} - a_n = b_n$ $(n \geqq 2)$ とおくと，$b_2 = a_3 - a_2 = 11 - 5 = 6$ であり，

$$b_{n+1} = 2b_n - 2 \iff b_{n+1} - 2 = 2(b_n - 2)$$

$\{b_n - 2\}$ は初項 $b_2 - 2 = 4$，公比 2 の等比数列であるので，

$$b_n - 2 = 4 \cdot 2^{n-2} \iff b_n = 2^n + 2$$

よって $a_{n+1} - a_n = 2^n + 2$ $(n \geqq 2)$ であるので，$n \geqq 3$ のとき，

$$a_n = a_2 + \sum_{k=2}^{n-1}(2^k + 2) = 5 + \frac{4(2^{n-2} - 1)}{2 - 1} + 2(n-2) = 2^n + 2n - 3$$

これは $n = 2$ のときも成り立つ．つまり $a_n = 2^n + 2n - 3$ $(n \geqq 2)$ である．（以下略）

Ⅳ　xy 平面上の放物線 $H : y = x^2$ と，中心を Q とする円 E が異なる 4 点 A，B，C，D で交わっており，A，B，C，D の x 座標をそれぞれ $a,\ b,\ c,\ d$（ただし $a < b < c < d$）とする。ここで，直線 AC と直線 BD が直交し，線分 BD の中点 M は直線 AC 上にあり，$\mathrm{AC} = \sqrt{2}\mathrm{BD}$ であるとする。以下の設問に答えよ。

(1)　$a + c$ の値を求めよ。

(2)　Q と M の x 座標をそれぞれ求めよ。

(3)　円 E の方程式を求めよ。

解答

(1)　線分 BD の中点が直線 AC 上にあり，直線 AC と直線 BD が直交していることから，線分 AC は円 E の直径である．円 E 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = 0$ であるから，

$$(x-a)(x-c) + (y-a^2)(y-c^2) = 0$$

が成り立ち，これが円 E の方程式である．この円と $y = x^2$ の交点の x 座標は，

$$\begin{aligned} &(x-a)(x-c) + (x^2-a^2)(x^2-c^2) = 0 \\ \iff &(x-a)(x-c)\{1 + (x+a)(x+c)\} = 0 \end{aligned}$$

の解である．この方程式の 4 解は $a,\ b,\ c,\ d$ であるから，

$$1 + (x+a)(x+c) = 0 \iff x^2 + (a+c)x + ac + 1 = 0$$

の 2 解が $b,\ d$ となる．ゆえに，解と係数の関係より，$b + d = -(a+c),\ bd = ac + 1$ を得る．

一方，直線 AC と直線 BD が直交していることから，

$$\frac{a^2-c^2}{a-c} \cdot \frac{b^2-d^2}{b-d} = -1 \iff (a+c)(b+d) = -1$$

ゆえに，$(a+c)^2 = 1$ を得る．$a + c = \pm 1,\ b + d = \mp 1$（複号同順）であるが，$a + c < b + d$ より，$a + c = \mathbf{-1},\ b + d = 1$ である．

(2)　(1) の結果から，点 Q の x 座標は，$\dfrac{a+c}{2} = \mathbf{-\dfrac{1}{2}}$ であり，点 M の x 座標は，$\dfrac{b+d}{2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$ である．

(3)　(1) の結果から直線 AC の傾きが $-1(= a + c)$ であり，(2) より点 Q と点 M の x 座標の差が 1 となることから，$\mathrm{QM} = \sqrt{2}$ であることがわかる．$\mathrm{AC} = \sqrt{2}\mathrm{BD}$ であるから，$\triangle\mathrm{QDM}$ は，直角二等辺三角形であり，$\mathrm{QD} = 2$ であることがわかる．したがって，円 E の半径は 2 である．よって，

$$\mathrm{AC} = \sqrt{2}(c-a) = 4 \iff a - c = -2\sqrt{2}$$

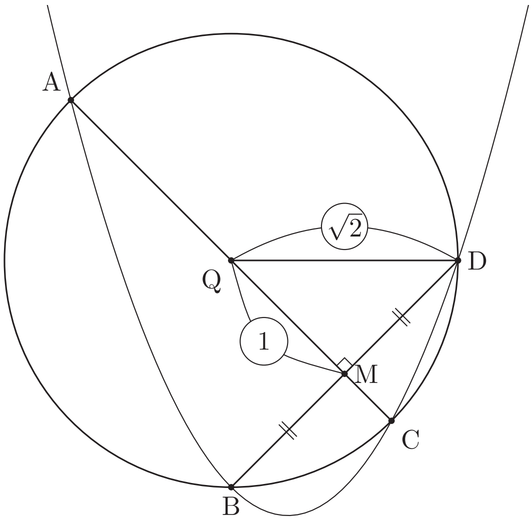
である．したがって，点 Q の y 座標は，

$$\frac{a^2+c^2}{2} = \frac{(a+c)^2 + (a-c)^2}{4} = \frac{9}{4}$$

であるから，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$ である．ゆえに，円 E の方程式は，

$$\boldsymbol{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = 4}$$

である．



別解

直線 AC の傾きが $-1(=a+c)$ であることは本解と同じようにして求めておく．直線 AC を $y=-x+k$ とおく．

放物線 $y=x^2$ を $y=-x+k$ に関して対称移動すると $x=k-(y-k)^2$ になるが，この放物線も A, B, C, D のすべてを通る．

したがって， $a,\ b,\ c,\ d$ は $y=x^2$ と $x=k-(y-k)^2$ を連立させてできる x の 4 次方程式の 4 解である．実際に連立させると

$$x=k-(x^2-k)^2 \iff x^4-2kx^2+x+k^2-k=0 \iff (x^2+x-k)(x^2-x-k+1)=0$$

となるが，$x^2+x-k=0$ の 2 解が $a,\ c$ で，$x^2-x-k+1=0$ の 2 解が $b,\ d$ であることは容易にわかる．したがって，解と係数の関係より

$$a+c=-1,\ ac=-k,\ b+d=1,\ bd=1-k$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{AC}=\sqrt{2}\mathrm{BD}$ であったから

$$(c-a)^2=2(d-b)^2 \iff (a+c)^2-4ac=2\{(b+d)^2-4bd\}$$

これに代入して $1+4k=2\{1-4(1-k)\}$ つまり $k=\dfrac{7}{4}$ を得る．円 E の方程式は $y=x^2$ と $x=k-(y-k)^2$ を辺々引くことにより

$$y-x=x^2-k+y^2-2ky+k^2 \iff x^2+y^2+x-\frac{9}{2}y+\frac{21}{16}=0$$

とわかる．

講評

Ⅰ［確率］（やや難）

与えられたルールに従ってカードの裏返すときの表の枚数について確率を求める問題であった．ここに載せた解答では，操作 1, 2, 3 の順を逆にすることにより簡潔に解いているが，受験生は丁寧に数え上げていけばよいだろう．ただし (3) からはかなり慎重に数える必要があり，完答するのは難しいと思われる．

Ⅱ［数学Ⅲの微積分］（やや難）

(1) は，2 曲線の上下関係をしっかりと押さえた上で完答したいところだが，領域が狭いので想像しにくかっただろう．(2) の値の評価は慣れていないと難しいかもしれない．

Ⅲ［数列］（やや難）

和 S_n を含む漸化式の問題．漸化式のタイプはオーソドックスなのだが，得られた a_{n+1}，a_n の関係式が $n=1$ では成り立たないことに注意する必要があり，そこを見落とした受験生は多いであろう．

Ⅳ［図形と方程式］（難）

4 つの交点をもつ放物線と円について，交点間に関する与えられた条件から円を決定する問題であった．まず線分 AC が円の直径だと気付けたかが重要だが，その後の処理も文字が多く，方針を立てるのが難しい．

2024 年度前期試験は近年になく難度が高かったが，今回の後期試験もそれに近いくらいの難度の高さであった．おそらく受験生が比較的得点しやすいのは Ⅰ (1)(2)，Ⅱ (1)，Ⅲでの S_n についての処理，くらいであろう．

1 次合格の目標は 35%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ

解説動画も公開予定！