解答速報

近畿大学医学部(後期)　数学

2024年2月24日実施

1　四面体 ABCD に対して，条件

$$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+2\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{0}$$

を満たす点 P がある．直線 AP と平面 BCD との交点を Q，直線 BQ と辺 CD との交点を R とする．また，平面 PCD と辺 AB との交点を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

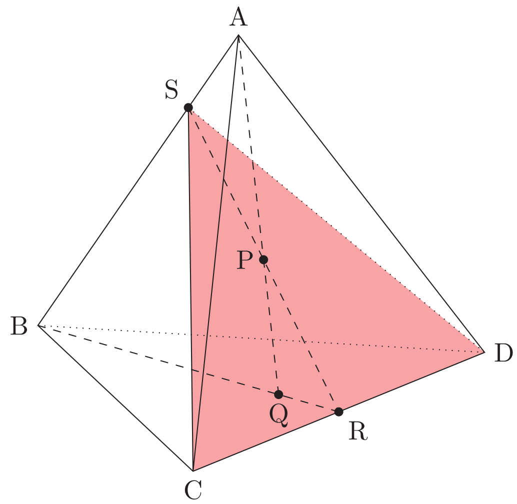
(1)　CR : RD を求めよ．
(2)　BQ : QR を求めよ．
(3)　AS : SB を求めよ．
(4)　△PCD : △PDS : △PSC を求めよ．

解答

(1) CR : RD = 1 : 1　(2) BQ : QR = 4 : 1　(3) AS : SB = 1 : 3　(4) △PCD : △PDS : △PSC = 2 : 1 : 1

解説

始点を A にして変形すると，



$$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+2\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{0}$$

$$\iff -3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{8}$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5}$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}}{5}$$

となる．したがって，CD の中点が R であり，線分 BR を 4 : 1 に内分する点が Q であり，線分 AQ を 5 : 3 に内分する点が P であることがわかる．これより

(1)　CR : RD = **1 : 1**

(2) BQ : QR $=$ **4 : 1**

である．

(3) $\triangle$ABQ と直線 RS に関するメネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PA}}=1 \iff \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SB}}\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{3}{5}=1 \iff \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SB}}=\frac{1}{3}$$

となるので，AS : SB $=$ **1 : 3** である．

注釈

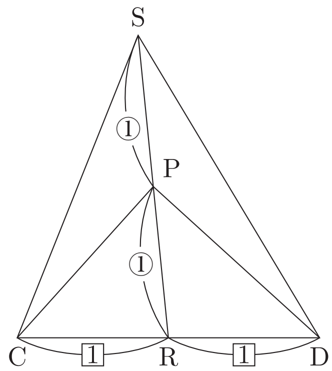
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{4}$$

の変形から $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と求めることもできる．

(4) $\triangle$BRS と直線 AQ に関するメネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{PS}}\cdot\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QR}}=1 \iff \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{PS}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{1}=1 \iff \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{PS}}=1$$

であるから，RP : PS $=1:1$ である．したがって，$\triangle$SCD の面積を S とおくと，



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PCD}:\triangle\mathrm{PDS}:\triangle\mathrm{PSC}&=\frac{1}{2}S:\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}S:\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}S\\&=\mathbf{2:1:1}\end{aligned}$$

である．

解説動画公開中!!
https://youtu.be/IJlL1XTQSOU

2 袋 A には赤球が 2 個，袋 B には白球が 2 個入っている．このとき次の試行 T を行う．

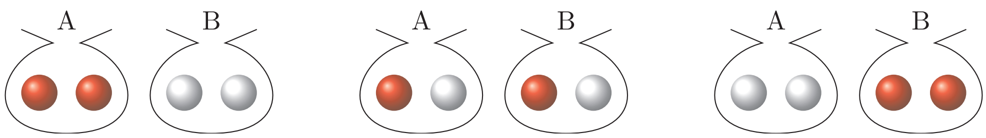
（試行 T） 袋 A，B から球を 1 個ずつ取り出し，袋 A から取り出した球を袋 B に，
袋 B から取り出した球を袋 A に入れる．

n 回の試行 T を繰り返した後，袋 A に赤球が 1 個入っている確率を P_n，袋 A に赤球が 2 個入っている確率を Q_n，袋 A に赤球が入っていない確率を R_n とする．すると，$P_3 = \boxed{\text{ア}}$，$P_5 = \boxed{\text{イ}}$ であり，P_{n+1} を P_n，Q_n，R_n を用いて表すと $P_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}$ となる．よって，P_n は n を用いて $P_n = \boxed{\text{エ}}$ と書ける．また，6 回の試行 T を行った後，袋 A に赤球が 1 個であった．このとき 3 回の試行 T 終了後も赤球が 1 個であった確率は $\boxed{\text{オ}}$ となる．

解答

ア $\dfrac{3}{4}$　イ $\dfrac{11}{16}$　ウ $\dfrac{1}{2}P_n + Q_n + R_n$　エ $\dfrac{1}{3}\left\{2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$　オ $\dfrac{5}{7}$

解説



状態 s_2　　状態 s_1　　状態 s_0

上図のように，A に赤球が k 個入っている状態を s_k とする（$k = 0,\ 1,\ 2$）．

- 現在の状態が s_2 で試行 T を行うと，
  袋 A からは必ず赤球を取り出し，袋 B からは必ず白球を取り出し，
  袋 B には赤球を，袋 A には白球を入れることになるので，
  次の状態は確率 1 で s_1 に移る．
- 現在の状態が s_0 で試行 T を行うと，
  袋 A からは必ず白球を取り出し，袋 B からは必ず赤球を取り出し，
  袋 B には白球を，袋 A には赤球を入れることになるので，
  次の状態は確率 1 で s_1 に移る．
- 現在の状態が s_1 で試行 T を行ったとき，
  - 次の状態が s_2 に移る確率は，
    袋 A からは白球を取り出し，袋 B からは赤球を取り出し，
    袋 B には白球を，袋 A には赤球を入れればよいので，

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

  - 次の状態が s_0 に移る確率は，
    袋 A からは赤球を取り出し，袋 B からは白球を取り出し，

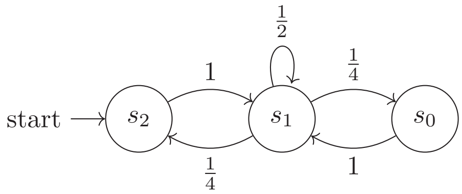
袋 B には赤球を，袋 A には白球を入れればよいので，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

– 次の状態が s_1 のままとなる確率は，
  袋 A と袋 B の両方から赤球を取り出してそれぞれの袋に赤球を入れるか，
  または，袋 A と袋 B の両方から白球を取り出してそれぞれの袋に白球を入れればよいので，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

以上をまとめると，以下の状態遷移図となる．



状態遷移図より，

$$\begin{aligned}
&P_1=1 && Q_1=0 && R_1=0\\
&P_2=\frac{1}{2}P_1+Q_1+R_1=\frac{1}{2} && Q_2=\frac{1}{4}P_1=\frac{1}{4} && R_2=\frac{1}{4}P_1=\frac{1}{4}\\
&P_3=\frac{1}{2}P_2+Q_2+R_2=\boldsymbol{\frac{3}{4}} && Q_3=\frac{1}{4}P_2=\frac{1}{8} && R_3=\frac{1}{4}P_2=\frac{1}{8}\\
&P_4=\frac{1}{2}P_3+Q_3+R_3=\frac{5}{8} && Q_4=\frac{1}{4}P_3=\frac{3}{16} && R_4=\frac{1}{4}P_3=\frac{3}{16}\\
&P_5=\frac{1}{2}P_4+Q_4+R_4=\boldsymbol{\frac{11}{16}} && Q_5=\frac{1}{4}P_4=\frac{5}{32} && R_5=\frac{1}{4}P_4=\frac{5}{32}
\end{aligned}$$

であり，

$$P_{n+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}P_n+Q_n+R_n}$$

である．ここで，$P_n+Q_n+R_n=1$ は常に成立するので，

$$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+(1-P_n)=1-\frac{1}{2}P_n$$

となり，

$$P_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{2}{3}\right)$$

より，

$$\begin{aligned}
P_n-\frac{2}{3}&=\left(P_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
&=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
\iff\qquad P_n&=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}
\end{aligned}$$

となる（もちろん先にこちらを求めてから P_3, P_5 を求めてもよい）．

状態 s_2 からはじめて，k 回の試行 T を行った後，状態 s_1 となっている事象を X_k とする．事象 X_k が起こる確率を $P(X_k)$ などと書くことにすると，求める条件付き確率は

$$P_{X_6}(X_3) = \frac{P(X_3 \cap X_6)}{P(X_6)} \cdots ①$$

である．X_k の起こる確率 $P(X_k)$ は $P(X_k) = P_k$ である．ここで，$X_3 \cap X_6$ は s_2 の状態からはじめて 3 回の試行 T 終了後も 6 回の試行 T 終了後も状態 s_1 である事象であるが，1 回だけ試行 T を行って状態 s_2 から状態 s_1 に移る確率が 1 であることから，状態 s_1 からはじめて 3 回の試行 T を行って状態 s_1 になる確率は P_4 であることに注意すると

$$\begin{aligned} ① &= \frac{P_3 \cdot P_4}{P_6} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{21}{32}} = \mathbf{\frac{5}{7}} \end{aligned}$$

である．

$\boxed{\text{注釈}}$

事象 X_k は上と同じとする．求めたい条件付き確率は $\dfrac{P(X_6 \cap X_3)}{P(X_6)} = \dfrac{P(X_6 \cap X_3)}{P_6}$ である．

X_k が起こっている場合，その l 回のちに X_{k+l} になっている確率は k に依存しない．つまり $\dfrac{P(X_k \cap X_{k+l})}{P(X_k)}$ は k によらない．したがって

$$\frac{P(X_3 \cap X_6)}{P(X_3)} = \frac{P(X_1 \cap X_4)}{P(X_1)}$$

が成り立つ．ところが $P(X_1) = P_1 = 1$ であったから X_1 は必ず起こる事象であり，$P(X_1 \cap X_4) = P(X_4) = P_4$ も成り立つ．これより $P(X_3 \cap X_6) = P_3 \cdot P_4$ なので，求める確率は

$$\frac{P(X_6 \cap X_3)}{P(X_6)} = \frac{P_3 \cdot P_4}{P_6}$$

であり，その値は上の通り．

解説動画公開中!！
https://youtu.be/JGLQISiVq38

3 正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=4,\ a^2+b^2+c^2=8$ を満たす．次の問いに答えよ．

(1) $a=1$ のとき，$b,\ c$ の値を求めよ．

(2) $ab+bc+ca$ の値を求めよ．

(3) abc の最大値を求めよ．

(4) $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$ の最小値を求めよ．

解答

(1) $a=1$ のとき，$b+c=3,\ b^2+c^2=7$ であるので，

$$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc \iff 9=7+2bc \iff bc=1$$

したがって，$\begin{cases} b+c=3 \\ bc=1 \end{cases}$ から，$b,\ c$ は 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ の 2 解である．これを解いて，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$．

よって，$(b,\ c)=\left(\boldsymbol{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\mp\sqrt{5}}{2}}\right)$（複号同順）．

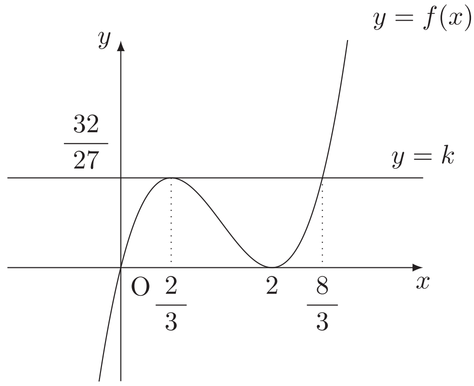
(2)

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \iff 16=8+2(ab+bc+ca) \iff ab+bc+ca=\mathbf{4}$$

(3) $abc=k$（k は正の実数）とすると，$\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=4 \\ abc=k \end{cases}$ から，$a,\ b,\ c$ は 3 次方程式 $x^3-4x^2+4x-k=0$ の 3 解である．これより，$k=x^3-4x^2+4x$ を得るので，$f(x)=x^3-4x^2+4x$ とすると，$f(x)=k$ が 3 つの正の実数解（重解含む）をもつ条件を考えればよい．

$f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$ であるので，増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



したがって，$(a,\ b,\ c)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{8}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ のときに最大値 $\boldsymbol{\dfrac{32}{27}}$ をとる．

(4)　$a+b+c=4$ であることから，(3) の k を用いると，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{4-a}{a}+\frac{4-b}{b}+\frac{4-c}{c} \\
&= \frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}-3 \\
&= \frac{4(ab+bc+ca)}{abc}-3 \\
&= \frac{16}{k}-3
\end{aligned}
$$

(3) から　$0<k\leqq\dfrac{32}{27}$ であるので，（与式）は $k=\dfrac{32}{27}$ のときに最小値 $16\cdot\dfrac{27}{32}-3=\mathbf{\dfrac{21}{2}}$ をとる．

別解

そのまま（与式）を通分してもよい．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}{abc} \\
&= \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}{abc} \\
&= \frac{16-3k}{k}
\end{aligned}
$$

と処理できる．

解説動画公開中!!
https://youtu.be/ionGFHwrEAA

講評

$\boxed{1}$［空間ベクトル］（やや易）

辺上に内分点をとった四面体において，線分比や面積比を考える問題．(3) では，平面内に落とし込んでメネラウスの定理を使うのがよいだろう．この問題は完答したい．

$\boxed{2}$［数列，確率］（標準〜やや難）

確率漸化式の問題であった．P_3，P_5 を求める前に P_n を求めてしまう方が手っ取り早いかも知れない．最後の条件付き確率はやや発想しづらかったであろう．

$\boxed{3}$［数と式，数学 II の微積分］（標準〜やや難）

(2) までは，3 文字の基本対称式についての基本的な問題であり，落とせない．(3) では，3 次方程式の解と係数の関係を利用するとよい．受験数学では定番の考え方ではあるが，同種の問題を解いた経験がないと発想しづらいだろう．(3) が解ければ (4) は難しくなく，この問題が完答出来たかどうかで差がつきそうである．

今年度から，後期試験のみが医学部独自の問題となった．$\boxed{2}$ の枠オ，$\boxed{3}$ の (3)(4) の難易度がやや高いが，例年の問題に比べると易しい問題の割合が多く，高得点勝負となりそうである．

一次合格の目標は 80%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ