医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

久留米大学医学部（後期）　数学

2024年3月8日実施

1.

(1)　k を実数の定数とするとき，$f(x)=x^2-2kx-2k^2+2k+1$ の $-3 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値は，k が以下の範囲にあるとき，

$k<\boxed{\text{アイ}}$ のとき，　最大値 $\boxed{\text{ウ}}$ 最小値 $\boxed{\text{エ}}$

$\boxed{\text{アイ}}<k<\boxed{\text{オカ}}$ のとき，　最大値 $\boxed{\text{キ}}$ 最小値 $\boxed{\text{ク}}$

$\boxed{\text{オカ}}<k<\boxed{\text{ケ}}$ のとき，　最大値 $\boxed{\text{コ}}$ 最小値 $\boxed{\text{サ}}$

$\boxed{\text{ケ}}<k$ のとき，　最大値 $\boxed{\text{シ}}$ 最小値 $\boxed{\text{ス}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものは下の ⓪ 〜 ④ の中から 1 つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

⓪　$f(-3)$　　①　$f(-1)$　　②　$f(0)$　　③　$f(1)$　　④　$f(k)$

(2)　2 次方程式 $x^2-2kx-2k^2+2k+1=0$ の実数解が $-3<x \leqq 1$ に存在するような k の値の範囲は，

$$\boxed{\text{セソ}}\ \boxed{\text{タ}}\ k\ \boxed{\text{チ}}\ \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}},\quad \boxed{\text{ナ}}\ \boxed{\text{ニ}}\ k\ \boxed{\text{ヌ}}\ \boxed{\text{ネ}}$$ である。

ただし，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものは下の ⓪〜② の中から 1 つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

⓪　$=$　　①　$<$　　②　$\leqq$

解答

解答記号	正解
アイ	-3
ウ	③
エ	⓪
オカ	-1
キ	③
ク	④

解答記号	正解
ケ	1
コ	⓪
サ	④
シ	⓪
ス	③
セソタ k チ $\frac{\text{ツテ}}{\text{ト}}$	-1 ② k ② $\frac{-1}{3}$
ナニ k ヌネ	1 ② k ① 5

解説

(1)

$$f(x)=(x-k)^2-3k^2+2k+1$$

となるので,

(i)　$k<\boldsymbol{-3}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{f(1)}$，最小値 $\boldsymbol{f(-3)}$（図 1）

(ii)　$-3<k<\boldsymbol{-1}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{f(1)}$，最小値 $\boldsymbol{f(k)}$（図 2）

(iii)　$-1<k<\boldsymbol{1}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{f(-3)}$，最小値 $\boldsymbol{f(k)}$（図 3）

(iv)　$1<k$ のとき，最大値 $\boldsymbol{f(-3)}$，最小値 $\boldsymbol{f(1)}$（図 4）

である.

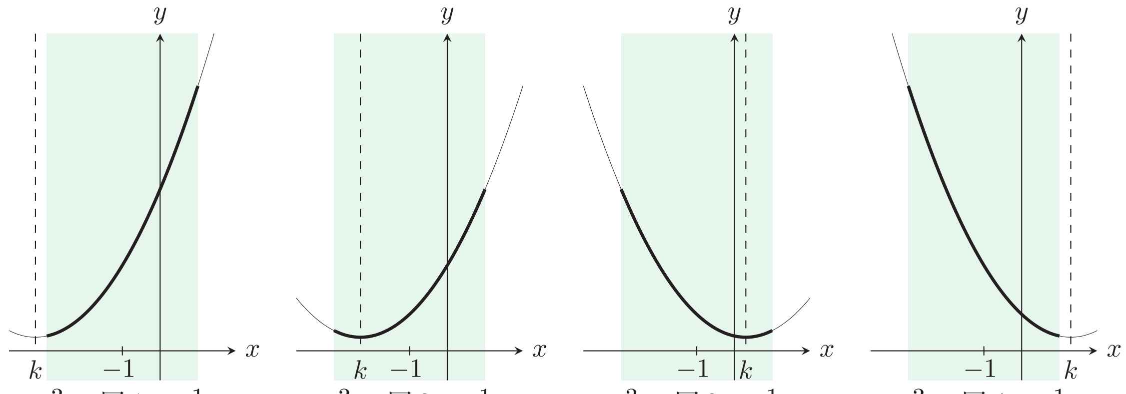


図 1　図 2　図 3　図 4

(2)　(i)　$k\leqq -3$ のとき,

$$f(1)=-2k^2+2\leqq -16$$

なので，$-3<x\leqq 1$ に $f(x)=0$ の解は存在しない.

(ii)　$-3<k<1$ のとき，$-3<x\leqq 1$ に $f(x)=0$ の解が存在するための条件は,

$$\bigl(f(-3)>0 \text{ または } f(1)\geqq 0\bigr) \text{ かつ } f(k)\leqq 0$$

であるので,

$$f(-3)=-2k^2+8k+10=-2(k+1)(k-5)>0 \iff -1<k<5$$

$$f(1)=-2k^2+2=-2(k+1)(k-1)\geqq 0 \iff -1\leqq k\leqq 1$$

$$f(k)=-3k^2+2k+1=-(3k+1)(k-1)\leqq 0 \iff k\leqq -\frac{1}{3},\ 1\leqq k$$

より，$-1\leqq k\leqq -\dfrac{1}{3}$ である.

(iii)　$k\geqq 1$ のとき，$-3<x\leqq 1$ に $f(x)=0$ の解が存在するための条件は,

$$f(-3)>0 \text{ かつ } f(1)\leqq 0$$

であるので,

$$f(-3)=-2(k+1)(k-5)>0 \iff -1<k<5$$

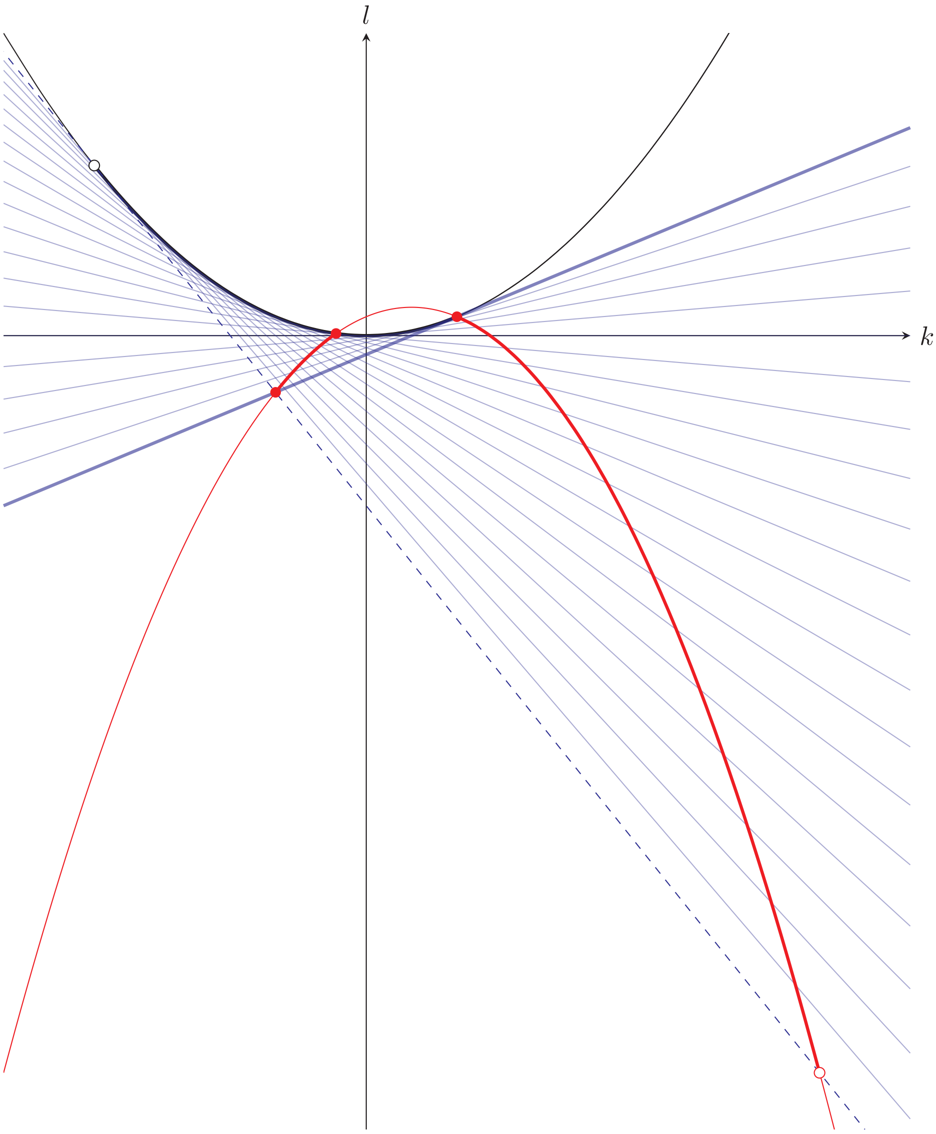
$$f(1)=-2(k+1)(k-1)\leqq 0 \iff k\leqq -1,\ 1\leqq k$$

より，$1\leqq k<5$ である.

以上より，求める k の値の範囲は，$\boldsymbol{-1\leqq k\leqq -\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{1\leqq k<5}$ である.

別解 1

$x^2-2kx+l=0$ が $-3<x\leqq 1$ において実数解を持つ条件は，kl 平面において直線 $l=2xk-x^2$ を $-3<x\leqq 1$ の範囲で変化させたときの通過領域である．この直線は放物線 $l=k^2$ の $(x,\ x^2)$ における接線であることを考慮すると，その領域は下図の通りとなる．



$l=-2k^2+2k+1$ がこの領域内にあるような k の範囲は，図より $\boldsymbol{-1\leqq k\leqq -\frac{1}{3},\ 1\leqq k<5}$ である．

別解 2

解の公式を使って強引に定数分離して解くこともできる．

$$\begin{aligned}
&x^2-2kx-2k^2+2k+1=0\\
\iff& 2k^2+2(x-1)k-(x^2+1)=0\\
\iff& k=\frac{-(x-1)\pm\sqrt{(x-1)^2+2(x^2+1)}}{2}=\frac{-x+1\pm\sqrt{3x^2-2x+3}}{2}
\end{aligned}$$

$g(x)=\dfrac{-x+1+\sqrt{3x^2-2x+3}}{2}$, $h(x)=\dfrac{-x+1-\sqrt{3x^2-2x+3}}{2}$ とおく．$y=g(x)$ または $y=h(x)$ が $y=k$ と共有点を持つような k の範囲を求めたい．

$\sqrt{3x^2-2x+3}$ の根号内は常に正になるので $g(x)$ はすべての x で定義される．$g'(x)=\dfrac{3x-1-\sqrt{3x^2-2x+3}}{2\sqrt{3x^2-2x+3}}$ であり，$g'(x)=0 \iff x=1$ もわかるので増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

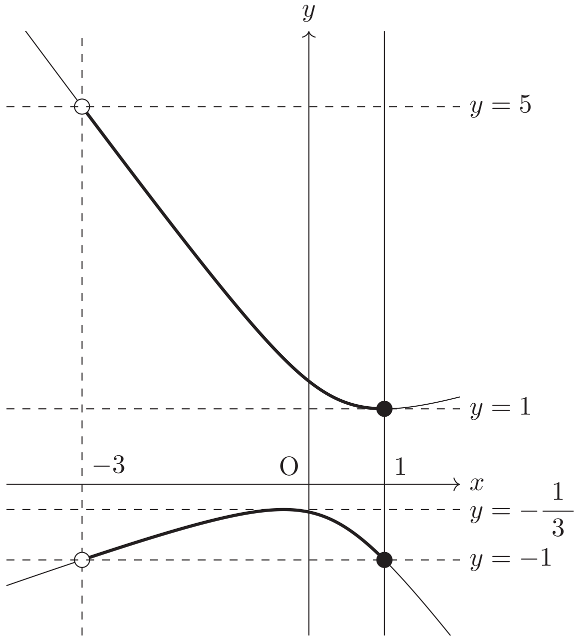
また $g(-3)=5$ である．

$h(x)=\dfrac{-x+1-\sqrt{3x^2-2x+3}}{2}$ も同様にすべての x で定義され，$h'(x)=\dfrac{-3x+1-\sqrt{3x^2-2x+3}}{2\sqrt{3x^2-2x+3}}$ である．$h'(x)=0 \iff x=-\dfrac{1}{3}$ であり増減表は次の通り．

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{3}$	$\searrow$

また $h(-3)=-1,\ h(1)=-1$ である．

以上より $y=g(x)$ および $y=h(x)$ のグラフを同じ座標平面上に描くと次のようになる．



このグラフが $y=k$ と $-3<x\leqq 1$ の範囲で共有点を持つのは $-1\leqq k\leqq -\dfrac{1}{3}$，$1\leqq k<5$ であることがわかる．

2. 複素数 $z=-\sqrt{2}-\sqrt{6}+(\sqrt{2}-\sqrt{6})i$ について，

(1) z^2 の値は，$z^2=\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}+\boxed{\text{ヒ}}i$ である。

(2) z を極形式で表すと，$z=\boxed{\text{フ}}\left(\cos\dfrac{\boxed{\text{ヘホ}}}{\boxed{\text{マミ}}}\pi+i\sin\dfrac{\boxed{\text{ヘホ}}}{\boxed{\text{マミ}}}\pi\right)$ である。

ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。

(3) z^8 の値は，$z^8=\boxed{\text{ム}}^{\boxed{\text{メモ}}}\left(\boxed{\text{ヤユ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}i\right)$ である。

(4) n を自然数とする。$(1-i)z^n$ が実数となる最小の n は，$n=\boxed{\text{ラ}}$ である。

解答

解答記号	正解
ノ$\sqrt{\text{ハ}}$＋ヒ i	$8\sqrt{3}+8i$
フ，$\dfrac{\text{ヘホ}}{\text{マミ}}$	4，$\dfrac{13}{12}$
ム$^{\text{メモ}}$$\left(\text{ヤユ}+\sqrt{\text{ヨ}}i\right)$	$2^{15}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$
ラ	3

解説

(1)

$$\begin{aligned}z^2&=\left\{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+(\sqrt{2}-\sqrt{6})i\right\}^2\\&=(-\sqrt{2}-\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2+2(-\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})i\\&=\mathbf{8\sqrt{3}+8}i\end{aligned}$$

である.

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とすると，

$$z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=8\sqrt{3}+8i=16\left(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi\right)$$

であることから，$\begin{cases}r^2=16\\2\theta=\dfrac{1}{6}\pi+2k\pi\ (k=0,\ 1)\end{cases}$ すなわち $\begin{cases}r=4\\\theta=\dfrac{1}{12}\pi,\ \dfrac{13}{12}\pi\end{cases}$ を得る.

z は実部，虚部ともに負であることから，$z=\mathbf{4}\left(\cos\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{12}}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$.

別解

$z=4\left(-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)=\mathbf{4}\left(\cos\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{12}}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$ である.

(3)

$$\begin{aligned}z^8&=4^8\left(\cos\frac{26}{3}\pi+i\sin\frac{26}{3}\pi\right)\\&=2^{16}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

$$= 2^{16}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$
$$= \mathbf{2^{15}(-1+\sqrt{3}}i)$$

(4)

$$(1-i)z^n = \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{1}{4}\right)\pi + i\sin\left(-\frac{1}{4}\right)\pi\right\}\cdot 4^n\left(\cos\frac{13}{12}n\pi + i\sin\frac{13}{12}n\pi\right)$$
$$= 2^{2n+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{13n-3}{12}\pi + i\sin\frac{13n-3}{12}\pi\right)$$

であるので，これが実数となるには，

$$\frac{13n-3}{12}\pi = k\pi \ (k \text{ は整数})$$

が必要十分である．n は自然数であるので，順次考えることによりこの条件を満たす最小の自然数は $n = \mathbf{3}$ であることがわかる．

（ちなみに整数 p を用いて表すと，$(n,\ k) = (12p+3,\ 13p+3)$ である）

3. 実数 x, y, z が,

$$x+y+z=xy+yz+zx=4$$

を満たすとき,

(1) x^2yz を x だけの式で表すと，$x^2yz=x^4-\boxed{\text{リ}}x^3+\boxed{\text{ル}}x^2$ である。

(2) x のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{レ}}\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{\text{ロ}}}{\boxed{\text{ワ}}}$ である。

(3) x^2yz のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{あ}}\leqq x^2yz\leqq\dfrac{\boxed{\text{いうえ}}}{\boxed{\text{おか}}}$ であり，$x^2yz=\boxed{\text{あ}}$ となる $(x,\ y,\ z)$ の組は $\boxed{\text{き}}$ 組あり，$x^2yz=\dfrac{\boxed{\text{いうえ}}}{\boxed{\text{おか}}}$ となる $(x,\ y,\ z)$ の組は $\boxed{\text{く}}$ 組ある。

解答

解答記号	正解
x^4- リ x^3+ ル x^2	$x^4-4x^3+4x^2$
レ $\leqq x\leqq\dfrac{\text{ロ}}{\text{ワ}}$	$0\leqq x\leqq\dfrac{8}{3}$
あ $\leqq x^2yz\leqq\dfrac{\text{いうえ}}{\text{おか}}$	$0\leqq x^2yz\leqq\dfrac{256}{81}$
き	3
く	1

解説

(1) $y+z=-x+4$ であるので,

$$\begin{aligned}yz&=4-xy-zx\\&=4-x(y+z)\\&=4-x(-x+4)\\&=x^2-4x+4\end{aligned}$$

したがって，$x^2yz=x^2(x^2-4x+4)=x^4-\mathbf{4}x^3+\mathbf{4}x^2$.

別解

$xyz=k$ とすると，x, y, z を解にもつ 3 次方程式のひとつは

$$X^3-4X^2+4X-k=0$$

であるので，$x^3-4x^2+4x-k=0 \iff k=x^3-4x^2+4x$ が成り立つ.
したがって，$x^2yz=xk=x^4-\mathbf{4}x^3+\mathbf{4}x^2$.

(2) $\begin{cases}y+z=-x+4\\ yz=x^2-4x+4\end{cases}$ であるので，y, z を解にもつ 2 次方程式のひとつは

$$t^2+(x-4)t+x^2-4x+4=0\cdots①$$

と表すことができる．y，z は実数であることから，①の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}D &= (x-4)^2 - 4(x^2-4x+4)\\ &= -3x^2+8x\\ &= -x(3x-8) \geqq 0\end{aligned}$$

したがって，x のとりうる値の範囲は $\mathbf{0} \leqq x \leqq \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$ である．

(3)　$x^2yz = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = f(x)$ とおくと，

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$ であるので，増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	$\dfrac{8}{3}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{256}{81}$

したがって，x^2yz のとりうる値の範囲は $\mathbf{0} \leqq x^2yz \leqq \dfrac{\mathbf{256}}{\mathbf{81}}$ である．

(i)　$x^2yz = 0$ のとき，$x = 0,\ 2$ である．

- $x = 0$ のとき ① 式は

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \iff (t-2)^2 = 0$$

　であるので，$(x,\ y,\ z) = (0,\ 2,\ 2)$ の 1 組ある．

- $x = 2$ のとき ① 式は

$$t^2 - 2t = 0 \iff t(t-2) = 0$$

　であるので，$(x,\ y,\ z) = (2,\ 0,\ 2),\ (2,\ 2,\ 0)$ の 2 組ある．

以上より，$(x,\ y,\ z)$ の組は **3** 組ある．

(ii)　$x^2yz = \dfrac{256}{81}$ のとき，$x = \dfrac{8}{3}$ である．このとき ① 式は

$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} = 0 \iff \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

であるので，$(x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ の **1** 組ある．

4. 四面体 ABCD において，辺 AB を 2 : 3 に内分する点を P，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 CA の中点を R，辺 CD の中点を S，辺 BD を 1 : 3 に内分する点を T とし，直線 PC と直線 QR の交点を E，直線 BS と直線 CT の交点を F，3 点 E, C, D を通る平面を α とするとき，

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boxed{\text{け}}}{\boxed{\text{こ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{さ}}}{\boxed{\text{しす}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

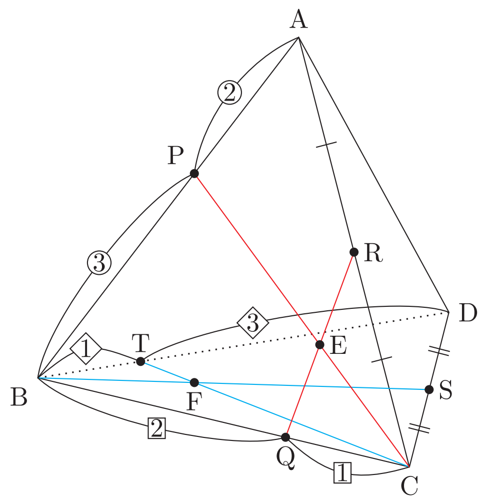
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{\boxed{\text{せ}}}{\boxed{\text{そ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{た}}}{\boxed{\text{ち}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\dfrac{\boxed{\text{つ}}}{\boxed{\text{て}}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である。

(3) 平面 α と直線 AF の交点を U とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AU}}=\dfrac{10}{19}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ であるから，四面体 ABCD の体積を V とすると，四面体 UBCF の体積は $\dfrac{\boxed{\text{と}}}{\boxed{\text{なに}}}V$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{け}}{\text{こ}}$, $\dfrac{\text{さ}}{\text{しす}}$	$\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{7}{12}$
$\dfrac{\text{せ}}{\text{そ}}$, $\dfrac{\text{た}}{\text{ち}}$, $\dfrac{\text{つ}}{\text{て}}$	$\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{5}$
$\dfrac{\text{と}}{\text{なに}}$	$\dfrac{9}{95}$

解説



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}},$$

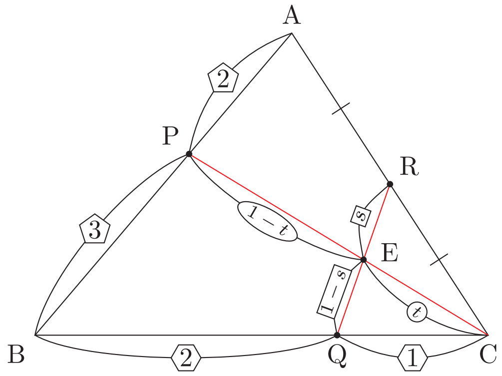
$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

である．

(1)　点 E は直線 PC 上にあることから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \frac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdots ①\end{aligned}$$



と表すことができる．また，点 E は直線 QR 上でもあることから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AR}} + s\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \\ &= (1-s)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}s\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdots ②\end{aligned}$$

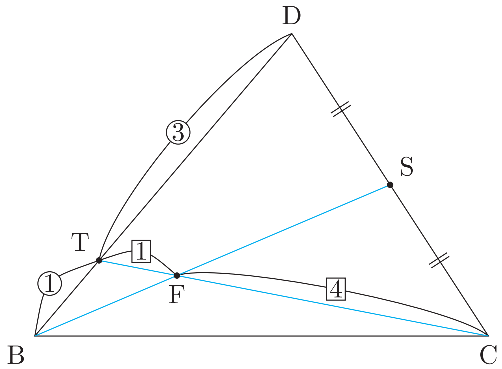
と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立なので係数を比較することができる．①, ② より，

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5}t = \dfrac{1}{3}s \\ 1-t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}s \end{cases}$$

これより $t = \dfrac{5}{12}$，$s = \dfrac{1}{2}$ を得る．② に代入し $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{\dfrac{7}{12}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる．

(2)　△CDT と直線 BS に対してメネラウスの定理を使うと，

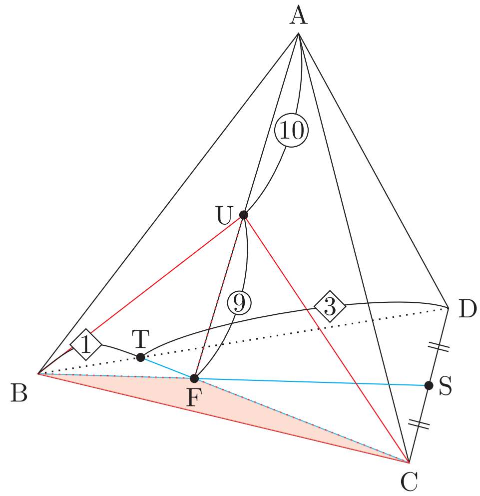
$$\frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{CS}}\cdot\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{TF}} = 1 \iff \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{TF}} = 1$$



これより TF : FC = 1 : 4 である．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AT}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{5}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{\frac{1}{5}}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \boldsymbol{\frac{1}{5}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AU}} = \dfrac{10}{19}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ より点 U は線分 AF を 10 : 9 に内分する点である．



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCF} &= \frac{4}{5}\triangle\mathrm{BCT}\\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{BCD}\\ &= \frac{1}{5}\triangle\mathrm{BCD}\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}(\text{四面体 UBCF}) &= \frac{1}{5}\cdot(\text{四面体 UBCD})\\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{9}{19}\cdot(\text{四面体 ABCD})\\ &= \boldsymbol{\frac{9}{95}}V\end{aligned}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

ちなみに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AU}} &= \frac{10}{19}\overrightarrow{\mathrm{AF}}\\ &= \frac{10}{19}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\\ &= \frac{10}{19}\left\{\frac{3}{5}\left(6\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \frac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right\} \qquad \left((1)\text{ より }\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 6\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \frac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\text{を利用}\right)\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{2}{19}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{36}{19}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の係数和が $-1 + \dfrac{2}{19} + \dfrac{36}{19} = 1$ であることから，点 U が確かに 3 点 C, D, E を含む平面上にあることが分かる．

的中!!

直前テキスト (2/29)

四角形 ABCD を底面とし O を頂点とする四角錐 O – ABCD において，底面の四角形 ABCD は $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たしている．辺 OD の中点を M とし，3 点 A, B, M を通る平面が辺 OC と交わる点を N とする．次に，四角形 ABNM の対角線の交点を P とし，直線 OP が底面 ABCD と交わる点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおいて，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\vec{a} - \boxed{\text{ア}}\,\vec{b} + \boxed{\text{イ}}\,\vec{c}}{2}$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}$ である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}\vec{a} + \dfrac{1}{\boxed{\text{カ}}}\vec{c}$ である．

(4) $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

(5) 四角錐 O – ABCD の体積を V_1，四面体 OBPN の体積を V_2 とするとき，$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{1}{\boxed{\text{クケ}}}$ である．

5. 座標平面上に 2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ と $C_2 : (x-5)^2 + y^2 = 16$ があり，この 2 つの円は点 S(1, 0) で接している。円 C_1 上を動く点 P と円 C_2 上を動く点 Q があり，動点 P と動点 Q は点 S を同時に出発し，動点 P は反時計回りに円 C_1 を 1 周して点 S に，動点 Q は時計回りに円 C_2 を半周して点 (9, 0) に同時に着くとし，動点 P と動点 Q はそれぞれ一定の速さで回るものとする。円 C_2 の中心を A とし，$\angle \mathrm{QAS} = \theta$ とするとき，

(1) 動点 P と動点 Q の座標を θ を用いて表すと，

$$\mathrm{P}\left(\cos \boxed{\text{ぬ}}\,\theta,\ \sin \boxed{\text{ぬ}}\,\theta\right),\ \mathrm{Q}\left(\boxed{\text{ねの}}\cos\theta + \boxed{\text{は}},\ \boxed{\text{ひ}}\sin\theta\right) \text{ である。}$$

ただし，θ の値の範囲は $\boxed{\text{ふ}}$ である。$\boxed{\text{ふ}}$ に当てはまるものを下の ⓪〜③ の中から 1 つ選べ。

⓪ $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$　① $0 \leqq \theta \leqq \pi$　② $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$　③ $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$

(2) 動点 P と動点 Q の中点を M とし，θ を $\boxed{\text{ふ}}$ の範囲で動かしたときの点 M が描く曲線を W とする。曲線 W と x 軸との交点は

$$\text{点}\left(\boxed{\text{へ}},\ 0\right) \text{と点}\left(\boxed{\text{ほ}},\ 0\right)\ \left(\text{ただし} \boxed{\text{へ}} < \boxed{\text{ほ}}\right)$$

であるから，曲線 W と x 軸とで囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ま}}}{\boxed{\text{み}}}\pi$ である。

解答

解答記号	正解
ぬ	2
ねの，は，ひ	−4，5，4
ふ	①
へ	1
ほ	5
$\dfrac{\text{ま}}{\text{み}}$	$\dfrac{7}{4}$

解説

(1) 与条件から動径 OP が x 軸の正の向きとなす角は 2θ であるから，P の座標は $(\cos \mathbf{2}\theta,\ \sin 2\theta)$ である．また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} \\ &= (5,\ 0) + (4\cos(\pi-\theta),\ 4\sin(\pi-\theta)) \\ &= (-4\cos\theta + 5,\ 4\sin\theta)\end{aligned}$$

より Q の座標は $(\mathbf{-4}\cos\theta + \mathbf{5},\ \mathbf{4}\sin\theta)$ である．また，題意から θ の値の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ (**①**) である．

(2)　M$(x,\ y)$ とすると，

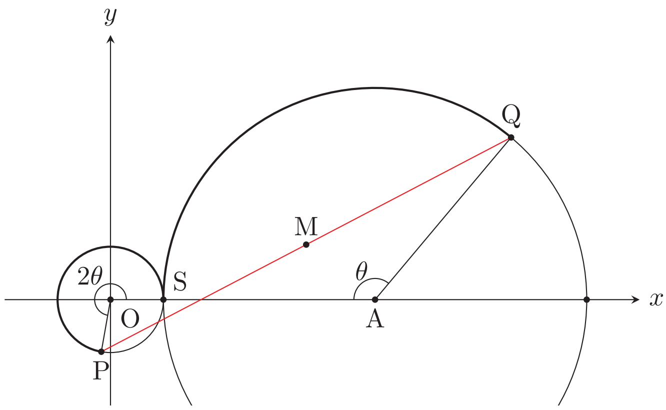
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$$

より

$$x=\frac{1}{2}(5-4\cos\theta+\cos 2\theta)$$
$$y=\frac{1}{2}(4\sin\theta+\sin 2\theta)$$

となる．これより

$$\begin{aligned}y&=2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\\&=(2+\cos\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

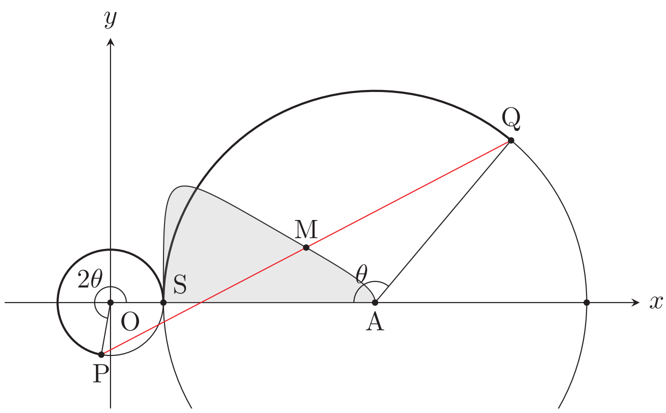


となるので，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $y=0\iff\theta=0,\ \pi$ となる．したがって W と x 軸との交点は，$\theta=0$ のとき $(\mathbf{1},\ 0)$ であり，$\theta=\pi$ のとき $(\mathbf{5},\ 0)$ である．

また，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，上の式より $y\geqq 0$ であり，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=\frac{1}{2}(4\sin\theta-2\sin 2\theta)\\&=2(1-\cos\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

より $\dfrac{dx}{d\theta}\geqq 0$ であるから，x は θ に関して単調増加である（参考：曲線 W と x 軸で囲まれた部分は右図の灰色部分となる）．したがって，求める面積は



$$\begin{aligned}\int_1^5 y\,dx&=\int_0^\pi y\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=\int_0^\pi\left(2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)(2\sin\theta-\sin 2\theta)d\theta\\&=\int_0^\pi\left(4\sin^2\theta-\sin\theta\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)d\theta\\&=\int_0^\pi\left\{2(1-\cos 2\theta)+\frac{1}{2}(\cos 3\theta-\cos\theta)-\frac{1}{4}(1-\cos 4\theta)\right\}d\theta\end{aligned}$$

（ここで，n が自然数のとき $\displaystyle\int_0^\pi\cos n\theta d\theta=0$ となることを利用すると，）

$$\begin{aligned}&=\int_0^\pi\left(2-\frac{1}{4}\right)d\theta\\&=\left[\frac{7}{4}\theta\right]_0^\pi=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\pi\end{aligned}$$

となる．

講評

1.［2 次関数］（標準）

文字定数を含む 2 次関数について，最大値・最小値や方程式の解について考える問題であった．場合分けが面倒であるが，丁寧に作業して何とか完答に近いところまでもっていきたい．

2.［複素数平面］（標準）

ド・モアブルの定理を利用して，複素数の累乗について考える問題．どれも標準的であり，落とせない．なお，$\dfrac{k}{12}$ が既約分数であるときの $\dfrac{k\pi}{12}$ の三角関数の値を覚えていれば心強かったであろう．

3.［数と式，数学 II の微積分］（やや難）

3 次方程式の解と係数の関係に絡めて，実数条件や関数のとり得る値の範囲について考える問題．この手の問題を解いた経験があるかどうかで差がつきそうである．

4.［空間ベクトル］（標準）

四面体において，線分の交点の位置ベクトルや立体の体積比を求める問題．登場する点の種類は多いのだが，位置ベクトルを求めるところは平面ベクトルの処理で済むし，体積比のところも線分比が与えられているなど，親切な設定になっている．

5.［数学 III の微積分］（標準）

2 つの動点を結ぶ線分の中点について，その軌跡や面積を考える問題．被積分関数において三角関数の変形が必要となるが，その後は $\cos n\theta$ の部分の定積分がすべて 0 になることを利用すれば簡単に計算できる．

2024 年度前期と比較すると，問題の難易度はやや穏やかになっているが，作業量は多く，処理力が得点を左右しそうである．大問 2 と 4 を完答し，他の 3 問はできればそれぞれ半分以上はとりたい．

1 次合格の目標は 70%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ