医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

大阪医科薬科大学（前期） 数学

2025年 2月 10日実施

〔1〕 次の問いに答えよ。

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)$$

(2)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}2k\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。 p を 2 以上の整数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}$$

を求めよ。

解答

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k^2}{n^2}\right)\\&=\int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\,dx\\&=\left[\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\pi}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}2k\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p-2}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\cdot\frac{k}{n}\sin\left(2\pi\cdot\frac{k}{n}\right)\cdots①\end{aligned}$$

である．ここで， $p=2$ のときは

$$①=\int_0^1 2x\sin 2\pi x\,dx$$

$$= \left[-\frac{x}{\pi} \cos 2\pi x + \frac{1}{2\pi^2} \sin 2\pi x \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{\pi}$$

である．したがって，$p > 2$ のときは

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-2}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \frac{k}{n} \sin\left(2\pi \cdot \frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}$$

より ① $= 0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = \begin{cases} \boldsymbol{-\dfrac{1}{\pi}} & \boldsymbol{(p = 2)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(p > 2)} \end{cases}$$

である．

注釈

$p = 2$ のとき $\dfrac{2k}{n}$ を x と考えて

$$① = \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin \pi x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{\pi} \cos \pi x + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x \right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{\pi}$$

としてもよい．

〔2〕 xyz 空間において，原点を通り，ベクトル $\vec{m}=(-6,\ 2,\ 5)$ に平行な直線 l があり，また，点 $\mathrm{A}(-10,\ 0,\ 14)$，$\mathrm{B}(8,\ -1,\ -3)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 点 A から直線 l に垂線をおろし l との交点を C，同様に点 B から直線 l に垂線をおろし l との交点を D とする。C と D の座標を求めよ。また，ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ を求めよ。

(2) 4 点 A，B，C，D は同一平面上にないことを示せ。

(3) l 上に動点 P があるとき，線分の長さの和 $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ。

解答

(1) 原点を O とおくと，点 C は直線 l 上なので，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\vec{m}$ とおける．すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\vec{m}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{m}=0$ なので，

$$s|\vec{m}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{m}=0$$
$$\iff 65s-130=0$$

より，$s=2$ である．よって $\mathrm{C}(\mathbf{-12,\ 4,\ 10})$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 4,\ -4)$ なので $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\mathbf{6}$ である．

同様に，点 D は直線 l 上なので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{m}$ とおける．すなわち $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=t\vec{m}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\vec{m}=0$ なので，

$$t|\vec{m}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{m}=0$$
$$\iff 65t+65=0$$

より，$t=-1$ である．よって $\mathrm{D}(\mathbf{6,\ -2,\ -5})$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-2,\ -1,\ -2)$ なので $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\mathbf{3}$ である．

(2) 4 点 A，B，C，D が同一平面上にあると仮定すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=x\overrightarrow{\mathrm{AC}}+y\vec{m}$$

とおける．$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\vec{m}=0$ より，

$$x\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{m}+y|\vec{m}|^2=0$$

となるが，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{m}=0$，$|\vec{m}|^2\fallingdotseq 0$ より $y=0$ となる．よって，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=x\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるが，これを満たす x は存在しないので矛盾する．

したがって，4 点 A，B，C，D は同一平面上にない．　(証明終)

注釈

$l\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$l\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ より直線 AC と直線 BD は交点を持たないので，4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるならば $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ が平行になってしまう，ということである．

別解

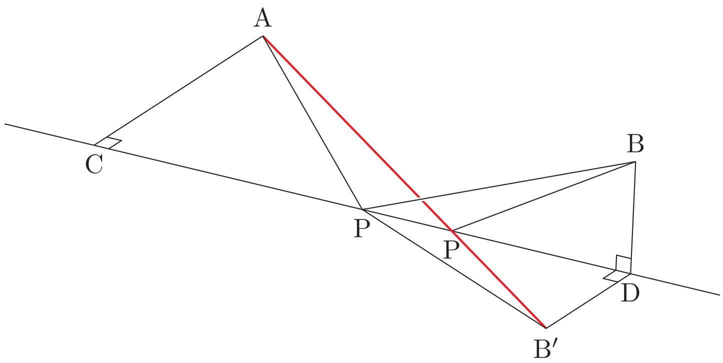
A，B，C，D が同一平面上にあると仮定すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\iff (16,\ -2,\ -19)=(18p-2q,\ -p+4q,\ -17p-4q)$$
$$\iff \begin{cases} 16=18p-2q\cdots①\\ -2=-p+4q\cdots②\\ -19=-17p-4q\cdots③\end{cases}$$

を満たす実数 $p,\ q$ が存在することになる．

①, ②から $p=\dfrac{6}{7}$，$q=-\dfrac{2}{7}$ となるが，このとき ③式は $-19=-\dfrac{94}{7}$ となり矛盾する．したがって，この連立方程式を満たす実数 $p,\ q$ は存在しないので，A，B，C，D は同一平面上にない． (証明終)

(3) 下図のように，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB'}}$ が同じ向きとなり，$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{B'D}}|$ となるような点 $\mathrm{B'}$ をとる．すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{B'D}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．



このとき，$\mathrm{BP}=\mathrm{B'P}$ となるので，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{AP}+\mathrm{B'P}$ である．よって，点 P が線分 $\mathrm{AB'}$ 上にあるときに最小となる．$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|:|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=2:1$ より，このときの点 P は線分 CD を $2:1$ に内分する点となるので，**(0，0，0)** である．求める最小値は，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}+\mathrm{B'P}&=\mathrm{AO}+\mathrm{B'O}\\&=2\mathrm{OB}+\mathrm{OB}\\&=3\mathrm{OB}\\&=\mathbf{3\sqrt{74}}\end{aligned}$$

である．

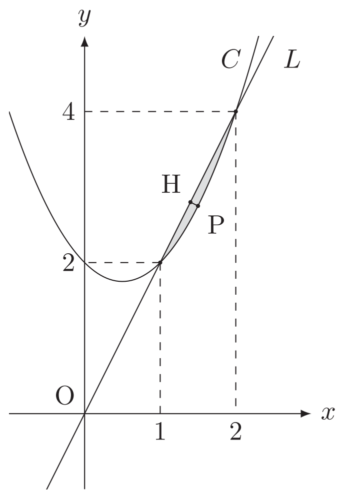
〔3〕 原点をOとする xy 平面において，曲線 $C: y = x^2 - x + 2$ と直線 $L: y = 2x$ で囲まれた図形を S とする。図形 S の境界に含まれる C 上の各点を P として，各点 P から L に垂線をおろし，垂線と L との交点を H とする。線分 PH，線分 OH の長さをそれぞれ r, h とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標を t とするとき，r および h をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 図形 S を直線 L の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答

まず，C と L の交点の座標は $x^2 - x + 2 = 2x$ を解くことにより $(1,\ 2)$, $(2,\ 4)$ とわかる．したがって $1 \leqq t \leqq 2$ がわかる．図は右のようになっている．



(1) $\mathrm{PH} = r$ は $\mathrm{P}(t,\ t^2 - t + 2)$ と直線 $L: y = 2x$ の距離であるから，点と直線の距離の公式より

$$r = \frac{|(t^2 - t + 2) - 2t|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|t^2 - 3t + 2|}{\sqrt{5}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-t^2 + 3t - 2}{\sqrt{5}}} \quad (\because\ t^2 - 3t + 2 \leqq 0)$$

また $\mathrm{OH} = h$ は P を通る傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線 $y = -\dfrac{1}{2}(x - t) + t^2 - t + 2$，つまり $x + 2y - 2t^2 + t - 4 = 0$ と原点 $(0,\ 0)$ との距離であるから，点と直線の距離の公式より

$$h = \frac{|2t^2 - t + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2t^2 - t + 4}{\sqrt{5}}} \quad (\because\ 2t^2 - t + 4 \geqq 0)$$

(2) $\mathrm{P}(1,\ 2)$ のとき $h = \sqrt{5}$, $\mathrm{P}(2,\ 4)$ のとき $h = 2\sqrt{5}$ なので，求める体積 V は

$$V = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \pi r^2 dh = \int_1^2 \pi r^2 \frac{dh}{dt} dt$$
$$= \int_1^2 \pi \cdot \frac{(t-1)^2(t-2)^2}{5} \cdot \frac{4t - 1}{\sqrt{5}} dt$$
$$= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \int_1^2 (t-1)^2(t-2)^2\{4(t-1) + 3\} dt$$
$$= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \int_1^2 \{4(t-1)^3(t-2)^2 + 3(t-1)^2(t-2)^2\} dt$$
$$= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \left\{4 \cdot \frac{3!2!}{6!} \cdot (2-1)^6 + 3 \cdot \frac{2!2!}{5!} \cdot (2-1)^5\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}\pi}{150}}$$

注釈

上記の積分計算では，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx = \frac{m!n!(-1)^n}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ という公式を使用しているが，以下のように $t-1=u$ と置換してもよいだろう．

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_1^2 (t-1)^2(t-2)^2(4t-1)dt \\ &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^1 u^2(u-1)^2(4u+3)du \\ &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^1 (4u^5-5u^4-2u^3+3u^2)du \\ &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}}\left[\frac{2}{3}u^6-u^5-\frac{1}{2}u^4+u^3\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}\pi}{150}} \end{aligned}$$

別解

いわゆる傘型分割の考え方を用いると，以下のように体積 V を求めることができる．

$y=2x$ と x 軸のなす鋭角を θ とすると，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である．したがって

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi\{2x-(x^2-x+2)\}^2\cos\theta dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{5}}\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2!2!}{5!}(2-1)^5 \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}\pi}{150}} \end{aligned}$$

大的中

2025年2月7日実施 大阪医科薬科大学直前テキスト（本番の3日前！）

xy 平面上に曲線 $C\colon y=x^2-x\ (0\leqq x\leqq 2)$ がある．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t)$ から直線 $l: y=x$ に下ろした垂線と l との交点を H とする．

(1) 線分 PH の長さを t を用いて表せ．

(2) O を原点とするとき，線分 OH の長さを t を用いて表せ．

(3) C と l で囲まれた部分を l の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ．

斜軸回転体の体積が大的中！ 設問もほとんど同じであった．

〔4〕

(1)　n を正の整数とする。二項係数に関する等式

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} $$

が成り立つことを示せ。

(2)　コインを 1 枚投げる。投げたときの表裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ である。表が出れば得点は 1 点とし，裏が出れば得点は -1 点とする。この試行を 12 回繰り返す。1 回目から k 回目までの合計得点を S_k 点とする。ただし S_1 点は 1 回目の得点である。次の問いに答えよ。

(i)　$S_{12}=0$ となる確率を求めよ。

(ii)　$S_{12}=0$ であったとき，S_1, S_2, $\cdots$, S_{11} がすべて負である確率を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$
\begin{aligned}
{}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}
\end{aligned}
$$

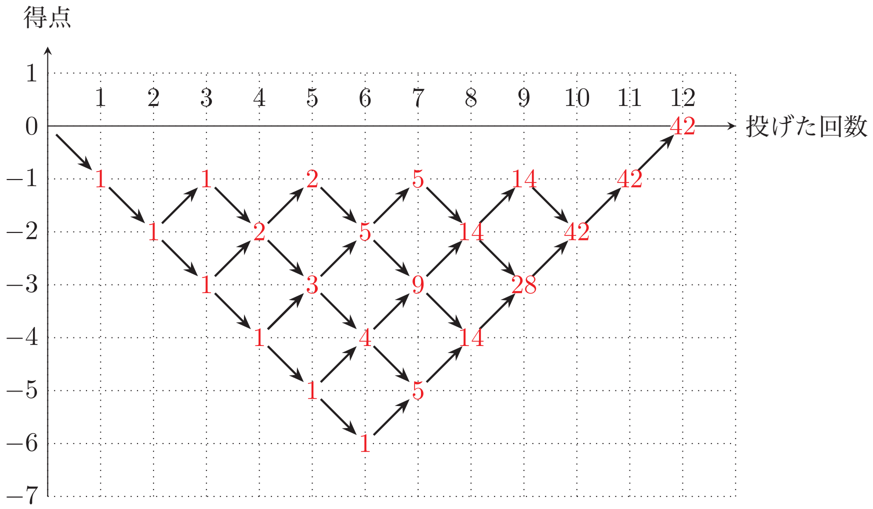
よって ${}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ が成り立つ．　(証明終)

(2)　(i)　表，裏が 6 回ずつ出ればよいので，求める確率は

$$ {}_{12}\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \mathbf{\frac{231}{1024}} $$

(ii)　下図のように，グラフを用いて題意を満たす経路数を数え上げると 42 通りあるとわかる．したがって，$S_{12}=0$ でかつ S_1, S_2, $\cdots$, S_{11} がすべて負となる確率は $\dfrac{42}{2^{12}}$ であるから，求める条件付き確率は

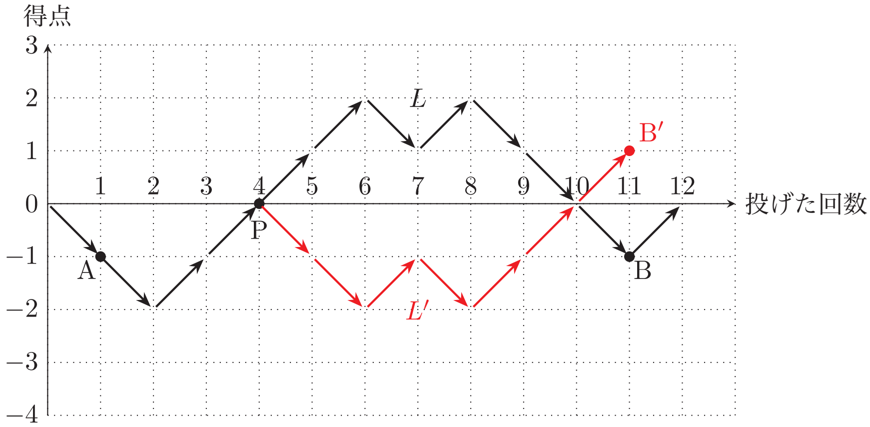
$\dfrac{\frac{42}{2^{12}}}{\frac{231}{1024}} = \mathbf{\dfrac{1}{22}}$ である．



別解

(1) の等式の考え方を利用して以下のように考えることも可能である．以下，特に断りが無い限り「経路」とは最短経路を意味するものとする．

上の図において，点 $(1,\ -1)$ を A，点 $(11,\ -1)$ を B とする．題意を満たす動きを考えると，点 A から点 B に達することが必要である．この動きをする経路数は，題意を満たさないものも含めて考えると ${}_{10}\mathrm{C}_5$ 通りある．このうち題意を満たさないもの（つまり横軸上を通ってしまうもの）が何通りあるか考える．



そのような経路のひとつを L とし，経路 L において，初めて横軸上に達したときの点を P とする．経路 L のうち，点 P 以降の経路を横軸について折り返すと，点 B が B′ に移り，図の赤色の経路となる．このように，経路 L は点 A から B′ に移動する経路に置き換えることができる．逆に，点 A から B′ に至る任意の経路において，初めて横軸に達して以降の経路を横軸に関して折り返すと，A から B に至る経路のうちで題意を満たさないもののひとつになる．したがって，A から B に至る経路のうち題意を満たさないものと，A から B′ に至る経路とは 1 対 1 に対応するので，題意を満たさない経路は ${}_{10}\mathrm{C}_4$ 通りである．

以上から，題意を満たす経路数は ${}_{10}\mathrm{C}_5 - {}_{10}\mathrm{C}_4 \left(= \dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_5}{5+1} \right) = 42$ 通りとわかる．（以下略）

注釈

座標平面において，格子点上を点 $(0,\ 0)$ から点 $(n,\ n)$ まで最短で動くとき，動点が常に直線 $y \leqq x$ をみたすように動くときの最短経路の総数を n 番目のカタラン数という．これを c_n と表すことにすると，別解の議論と同様にして実は $c_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ であることがわかる．ここで，c_n については以下の漸化式が成り立つことが知られている．

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \end{cases}$$

本問では c_5 の値が必要であったが，この漸化式により $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 5,\ c_4 = 14,\ c_5 = 42$ がわかる．

的中!!

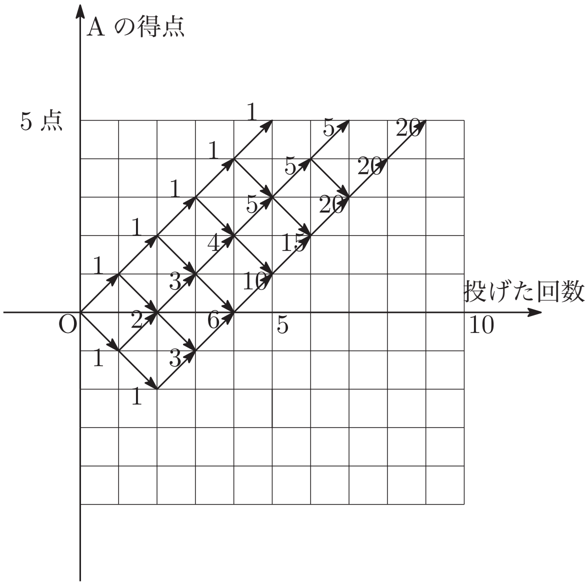
2025 年 1 月実施 大学別直前テキスト

A と B の 2 人が硬貨を投げるゲームをしている．表が出れば，A は B から 1 点を得，裏が出れば B は A から 1 点を得るものとする．A，B とも持ち点 0 点から始めて，先に 5 点を得た人が勝ちとなり，ゲームは終わる．硬貨の表，裏が出る確率は $\frac{1}{2}$ としたとき，硬貨を 10 回投げる間に A の勝つ確率を求めよ．

類題を大学別直前授業で演習！

図を描いて各点に至る経路の数を数える

という考え方が的中！



講評

〔1〕［数学Ⅲの積分］（標準）

区分求積法についての問題であった．後半の極限値で場合分けをしっかりやれたかどうかで差がつきそうだが，できれば完答を狙いたいところ．

〔2〕［空間ベクトル］（やや易〜やや難）

(1) は確実に正答したい．(2) は A，B，C，D が同一平面上にあると仮定して矛盾を示せばよい．(3) はいわゆる「折れ線の長さの和の最小値」を求める問題であり，平面では定番の問題である．空間になっても本質的には同じであり，相似を利用して解けばよいが，経験の有無で差がついたであろう．

〔3〕［数学Ⅲの積分］（やや難）

斜軸回転体の体積に関する問題であった．(1) は点と直線の距離の公式を用いて処理したり，座標から比を用いて処理したりといろいろ方法はあるが，確実に得点しておきたい．(2) は立式自体は経験があればできただろうが，定積分の計算を正しく処理することができたかどうかで差がつくであろう．

〔4〕［確率］（やや難）

いわゆるカタラン数に関する有名問題であった．(2) は，先に示した本解のように考えるのがシンプルであろう．別解のように (1) の式を利用した考え方もできるが，受験生にはだいぶハードルが高いと思われる．

昨年度と同様に大問 4 題の出題であり，また難問はないが易問もないセットである点も同様であった．同種の問題を解いた経験の有無が得点の差として大いに表れるだろう．問題〔1〕を完答し，〔2〕〜〔4〕はそれぞれ半分以上をとりたい．目標は 70%．