医学部進学予備校 メビオ

医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

# 解答速報

# 大阪医科薬科大学（後期）　数学

2025年 3月 10日実施

〔1〕 関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ と定め，$y=f(x)$ のグラフを曲線 $C$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの漸近線を調べ，曲線 $C$ の概形をかけ。

(2) 曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n$, $\cdots$ および直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上の点 $\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_2$, $\cdots$, $\mathrm{B}_n$, $\cdots$ を次のように定める。$\mathrm{A}_1(1,\ f(1))$ とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{A}_n$ を通り $y$ 軸に平行な直線と直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ との交点を $\mathrm{B}_n$，点 $\mathrm{B}_n$ から曲線 $C$ に接線を引いて接点を $\mathrm{A}_{n+1}$ とする。

(i) $\mathrm{A}_n(a_n,\ f(a_n))$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，$a_{n+1}$ を $a_n$ で表せ。また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(ii) $b_n=(\log_2 a_{2n})\cdot(\log_2 a_{2n+2})$ とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ の和を求めよ。

解答

(1) $f(x)$ の定義域は $x\neq 0$ である．$f(-x)=-f(x)$ より $f(x)$ は奇関数，すなわち $y=f(x)$ の概形は原点について対称である．したがって，$x>0$ での増減を考えればよい．

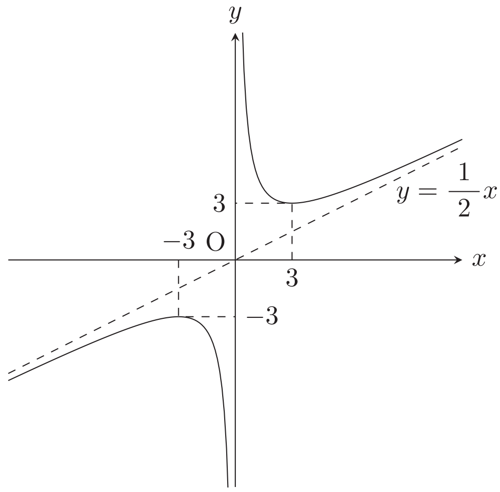
$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)$ なので，$f'(x)=0 \iff x=3$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty$ なので，増減表は次のようになる．

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $(\infty)$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $(\infty)$ |

これより，**$x=3$ で極小値 $3$，$x=-3$ で極大値 $-3$** をとる．また

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{2x}=0$$

より $y=\dfrac{1}{2}x$ は漸近線となり，$x=0$ も漸近線であるから，漸近線は **$y=\dfrac{1}{2}x$ および $x=0$** とわかる．したがって曲線 $C$ の概形は右のようになる．



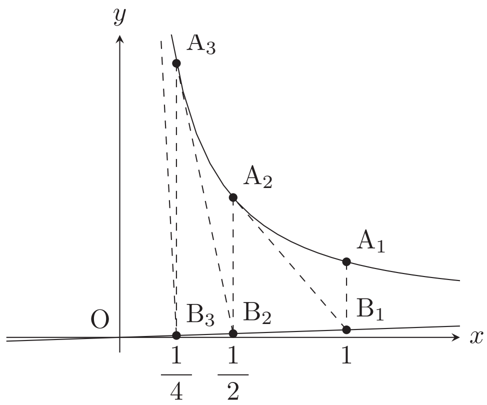

(2) (i) $(t,\ f(t))$ における接線は

$$y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{t^2}\right)(x-t)+\frac{1}{2}\left(t+\frac{9}{t}\right) \iff y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{t^2}\right)x+\frac{9}{t}$$

これが $\mathrm{B}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{2}a_n\right)$ を通るので代入すると

$$\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{t^2}\right)a_n + \frac{9}{t} \iff t = \frac{1}{2}a_n$$

これより $\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n}$ を得る．また，$a_1 = 1$ なので $\boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ である．




(ii)

$$\begin{aligned} b_n &= (\log_2 a_{2n}) \cdot (\log_2 a_{2n+2}) \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \\ &= -(2n-1) \cdot \{-(2n+1)\} \\ &= (2n-1)(2n+1) \end{aligned}$$

である．これより

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1}\right)\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

〔2〕 複素数 $z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ について，次の問いに答えよ。ただし，$i$ は虚数単位である。

(1) $z^{567}+\dfrac{1}{z^{567}}$ の値を求めよ。

(2) $(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$ の値を求めよ。

(3) $z+z^2+z^3$ の実部の値を求めよ。

解答

(1) $z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ より，$z^7=1$ であるから，

$$z^{567}=(z^7)^{81}=1$$

である．よって，$z^{567}+\dfrac{1}{z^{567}}=1+1=\mathbf{2}$ である．

(2)

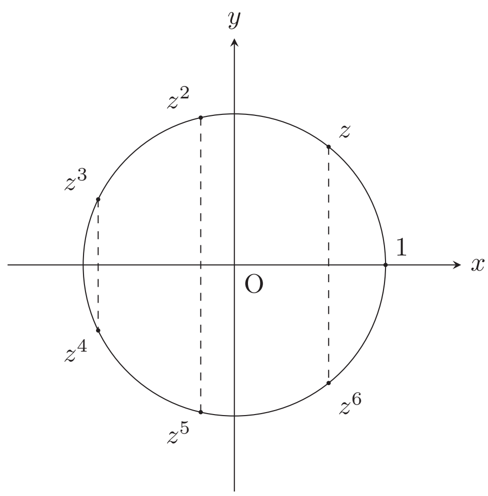
$$\begin{aligned} &z^7-1=0 \\ \iff &(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \end{aligned}$$

$z\fallingdotseq 1$ より，$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ すなわち，$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=-1$ $\cdots$ ① を得る．

$$\begin{aligned} &(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6) \\ &=z^4+z^6+z^7+z^5+z^7+z^8+z^7+z^9+z^{10} \\ &=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+3 \quad (\because z^7=1) \\ &=\mathbf{2} \quad (\because ①) \end{aligned}$$

(3) $z^7=1$ かつ $z\overline{z}=|z|^2=1$ であるから，$z^6=\overline{z}$，$z^5=\overline{z}^2$，$z^4=\overline{z}^3$ である．これより以下を得る．

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z+z^2+z^3)&=\frac{z+z^2+z^3+\overline{z+z^2+z^3}}{2} \\ &=\frac{z+z^2+z^3+\overline{z}+\overline{z}^2+\overline{z}^3}{2} \\ &=\frac{z+z^2+z^3+z^6+z^5+z^4}{2} \\ &=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{aligned}$$




別解

$\alpha=z+z^2+z^4$，$\beta=z^3+z^5+z^6$ とおくと，(2) より，$\alpha\beta=2$ であり，① より，$\alpha+\beta=-1$ である．ゆえに，解と係数の関係から $\alpha$，$\beta$ は 2 次方程式

$$t^2+t+2=0$$

の 2 解である．これを解くと，$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ を得るので，

$$\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\beta)=-\frac{1}{2}$$

である．ここで，$\mathrm{Re}(z^4) = \mathrm{Re}(\overline{z}^3) = \mathrm{Re}(z^3)$ であるから，$\mathrm{Re}(\alpha) = \mathrm{Re}(z + z^2 + z^3)$ である．よって，$\mathrm{Re}(z + z^2 + z^3) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ である．

的中!!

2/20 後期試験対策テキスト

$\theta = \dfrac{2\pi}{7}$, $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, $\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ のとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overline{\alpha} = \alpha^6$ を示せ．

(2) $\beta + \overline{\beta}$, $\beta\overline{\beta}$ を求めよ．

(3) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ を求めよ．

1 の 7 乗根と式の値が的中！

〔3〕 座標平面上に曲線 $C : y = \sqrt{x^2-4}$ $(x \geqq 2)$ がある。点 $(1,\ 0)$ を通る $C$ の接線を $l$ とし，次の問いに答えよ。

(1) 直線 $l$ の方程式を求めよ。また，$l$ と曲線 $C$ の接点の座標を求めよ。

(2) $t$ を 0 以上の実数とする。曲線 $C$ と直線 $x = e^t + e^{-t}$ の共有点の $y$ 座標を $t$ を用いて表せ。

(3) 直線 $l$，曲線 $C$ および $x$ 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

解答

(1) $y = \sqrt{x^2-4}$ より，$x^2 - y^2 = 4$ $(x \geqq 2,\ y \geqq 0)$ を得る．つまり曲線 $C$ は双曲線の一部である．この曲線上の点 $(p,\ q)$ $(p \geqq 2,\ q \geqq 0)$ での接線の方程式は

$$px - qy = 4$$

であり，これが点 $(1,\ 0)$ を通るとき，$p = 4$ となる．また $(p,\ q)$ は $C$ 上の点なので $p^2 - q^2 = 4$ を満たすから，$p = 4$ を代入して $q = 2\sqrt{3}$ を得る．したがって $l$ の方程式は

$$4x - 2\sqrt{3}y = 4 \iff \boldsymbol{2x - \sqrt{3}y = 2}$$

であり，接点の座標は $\boldsymbol{(4,\ 2\sqrt{3})}$ である．

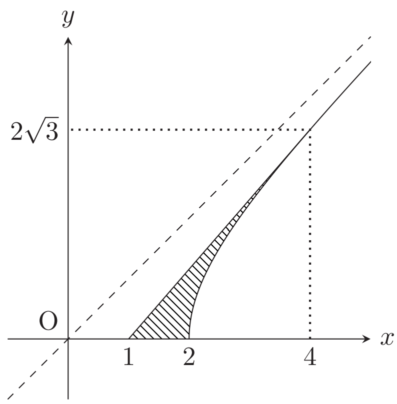
(2) $x = e^t + e^{-t}$ を $y = \sqrt{x^2-4}$ に代入すると，

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{(e^t + e^{-t})^2 - 4} \\ &= \sqrt{(e^t - e^{-t})^2} \\ &= e^t - e^{-t} \ (\because t \geqq 0) \end{aligned}$$

を得るので，共有点の $y$ 座標は $\boldsymbol{y = e^t - e^{-t}}$ である．

(3) グラフは右のようになる．

題意の領域は図の斜線部であり，その面積を $S$ とすると，




$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (4-1) \cdot 2\sqrt{3} - \int_2^4 y dx \\ &= 3\sqrt{3} - \int_2^4 y dx \cdots ① \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_2^4 y dx$ について，$y = \sqrt{x^2-4}$ 上の点は (2) の結果より

$$\begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} \end{cases}$$

と表すことができるので，$x = e^t + e^{-t}$ と置換すると，

$$\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}, \quad \begin{array}{c|c} x & 2 \to 4 \\ \hline t & 0 \to \log(2+\sqrt{3}) \end{array}$$

であることから，

$$\begin{aligned} \int_2^4 y dx &= \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t}) dt \\ &= \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} (e^{2t} + e^{-2t} - 2) dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t\right]_0^{\log(2+\sqrt{3})} \\
&= \frac{7+4\sqrt{3}}{2} - \frac{7-4\sqrt{3}}{2} - 2\log(2+\sqrt{3}) \\
&= 4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

を得る．これを①に代入することにより，

$$
\begin{aligned}
S &= 3\sqrt{3} - \{4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3})\} \\
&= \mathbf{2\log(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

注釈

なお，直接積分する方法も存在する．$y = \log(x+\sqrt{x^2-4})$ の導関数は

$$
y' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{x+\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}
$$

であることから，$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \log(x+\sqrt{x^2-4}) + C_1$ を得る（$C_1$ は積分定数）．
したがって，

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-4}dx &= \int (x)'\sqrt{x^2-4}dx \\
&= x\sqrt{x^2-4} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx \\
&= x\sqrt{x^2-4} - \left(\int \sqrt{x^2-4}dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx\right) \\
&= x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}dx - 4\log(x+\sqrt{x^2-4})
\end{aligned}
$$

より，$\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\log(x+\sqrt{x^2-4}) + C_2$ を得る（$C_2$ は積分定数）．以下略．

的中!!

大阪医科薬科大学直前テキスト，攻略講座テキスト

曲線 $C$ が媒介変数 $t$ を用いて，次の式で与えられている．

$$
x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}
$$

(1)　点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る曲線 $C$ の接線のうち，傾きが正のものの方程式を求めよ．そのとき，接点に対応する $t$ の値を求めよ．

(2)　この接線と，曲線 $C$ および $x$ 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

双曲線のパラメータ表示と求積が的中！

〔4〕 1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚の番号札が箱の中に入っている。この箱から番号札を 1 枚取り出し，数字を記録してからもとに戻すという試行を 3 回繰り返す。記録した数字の最大値を $X$，最小値を $Y$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，設問 (1) は結果のみを解答せよ。

(1) $X > Y$ である確率を求めよ。

(2) $X \leqq Y + 2$ である確率を求めよ。

(3) $X \geqq 8$ のとき，$Y \leqq 2$ である条件付き確率を求めよ。

解答

1 回目，2 回目，3 回目に取り出した番号札の数字が $a_1$，$a_2$，$a_3$ であるときの事象を，順序組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ で表すこととする．これらの事象は全部で $10^3$ 通りあり，各事象は同様に確からしい．

(1) 余事象は $X = Y$ であり，これは 3 枚とも同じ数字となることであるので，

$$(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ \cdots,\ (10,\ 10,\ 10)$$

の 10 通りである．よって，求める確率は，$1 - \dfrac{10}{10^3} = \mathbf{\dfrac{99}{100}}$ である．

(2) 取り出した数字が 1 種類か 2 種類か 3 種類かによって場合分けをする．

(i) 取り出した数字が 1 種類の場合，$X = Y$ であり，

$$(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ \cdots,\ (10,\ 10,\ 10)$$

の 10 通りである．

(ii) 取り出した数字が 2 種類の場合，$X \leqq Y + 2$ すなわち，$X - Y \leqq 2$ となるのは，2 種類の数字の差が 1 か 2 になるものであり，数字の組み合わせは

$$\{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \cdots,\ \{9,\ 10\},$$
$$\{1,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \cdots,\ \{8,\ 10\}$$

の 17 通りある．2 種類の数字 $\{a,\ b\}$ に対して，2 種類の数字のどちらが 2 枚取り出されるか，すなわち $(a,\ a,\ b)$ であるのか $(a,\ b,\ b)$ であるのかということとで 2 通り，取り出す順の並べ方で 3 通りあるので，取り出し方は $17 \times 2 \times 3 = 102$ 通りである．

(iii) 取り出した数字が 3 種類の場合，$X \leqq Y + 2$ すなわち，$X - Y \leqq 2$ となるのは，3 枚の数字の組み合わせが連続する 3 つの数となるものであり，数字の組み合わせは $\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{2,\ 3,\ 4\}$，$\cdots$，$\{8,\ 9,\ 10\}$ の 8 通りある．取り出す順の並べ方が $3!$ 通りあるので，取り出し方は $8 \times 3! = 48$ 通りである．

以上より，求める確率は，$\dfrac{10 + 102 + 48}{10^3} = \mathbf{\dfrac{4}{25}}$ である．

(3) • 「$X \leqq 7$」となるのは，「3 回とも 7 以下を取り出す」ことなので，

$$P(X \leqq 7) = \frac{7^3}{10^3}$$

• 「$Y \geqq 3$」となるのは，「3 回とも 3 以上を取り出す」ことなので，

$$P(Y \geqq 3) = \frac{8^3}{10^3}$$

• 「$X \leqq 7$ かつ $Y \geqq 3$」となるのは，「3 回とも 3 以上 7 以下を取り出す」ことなので，

$$P(X \leqq 7\ \text{かつ}\ Y \geqq 3) = \frac{5^3}{10^3}$$

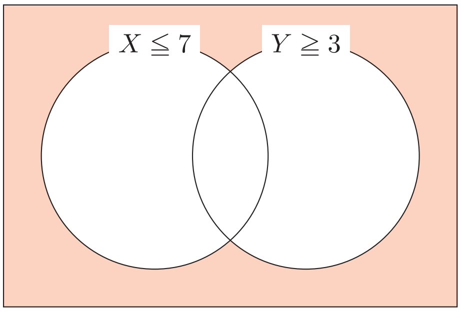
よって，

$$P(X \geqq 8) = 1 - P(X \leqq 7)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{7^3}{10^3} \\
&= \frac{657}{1000}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geqq 8 \text{ かつ } Y \leqq 2) &= 1 - P(X \leqq 7 \text{ または } Y \geqq 3) \\
&= 1 - \big(P(X \leqq 7) + P(Y \geqq 3) - P(X \leqq 7 \text{ かつ } Y \geqq 3)\big) \\
&= 1 - \frac{7^3 + 8^3 - 5^3}{10^3} \\
&= \frac{270}{1000}
\end{aligned}
$$

である（下図参照）.




以上より，求める条件付き確率は,

$$
\begin{aligned}
\frac{P(X \geqq 8 \text{ かつ } Y \leqq 2)}{P(X \geqq 8)} &= \frac{\frac{270}{1000}}{\frac{657}{1000}} \\
&= \boldsymbol{\frac{30}{73}}
\end{aligned}
$$

となる.

## 講評

〔1〕［数学Ⅲの微分，数列の極限］（標準）

分数関数についてそのグラフの概形を調べ，接線に関する数列について考える問題であった．標準レベルであり完答したい．(2) の接線で正解が導ければ，(3) は易しいため，この大問は差がつきやすい．

〔2〕［複素数平面］（標準）

1 の 7 乗根に関する典型的な問題であり，経験したことがある受験生は多かったのではないか．(3) では，$|z|=1$ であることから，$z\overline{z}=1$ となることを利用すればよく，この大問は完答を狙いたい．

〔3〕［数学Ⅲの微積分］（標準）

双曲線に関する問題であった．(1)(2) は落とせない．(3) についても，(2) で曲線 $C$ 上の点をパラメータで表す誘導がついているため，それを利用して正しく積分計算し完答を目指したいところである．

〔4〕［確率］（標準〜やや難）

(1) は容易．(2) は取り出す数字が何種類あるかによって場合分けを行い，ていねいに数えれば求められる．(3) は，いわゆる「余事象のベン図」を用いる典型的な問題である．たとえ (2) が解けなくても (3) は解けるので諦めないこと．

2025 年度前期に続き，90 分大問 4 題の出題であった．難易度は「標準」が大半であるが，実力差が点数の差として大いに表れるだろう．2 題完答，2 題半答くらいを目指したい．目標は 75%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ