藤田医科大学（前期）　数学

2025年 2月 4日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面において，曲線 $C: y = x^3 - x$ の $x = 0$ における法線 ℓ の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ であり，曲線 C と法線 ℓ と直線 $x = 1$ と $x = -1$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である。

(2)　$\left(\dfrac{\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)}\right)^n = 1$ を満たす最小の自然数 n の値は $\boxed{\text{エオ}}$ である。ただし，i は虚数単位である。

(3)　2 次方程式 $x^2 - 2ax + 4a + 5 = 0$ の解 α と β が実数となるように実数 a の範囲を定める。$\alpha^2 + \beta^2$ は $a = \boxed{\text{カキ}}$ のとき最小となる。

(4)　1 個のサイコロを続けて投げ 1 が 10 回出たところで終了する。ちょうど n 回投げて終了する確率を p_n とするとき，p_n を最大とする最小の n は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2 + x} + 2x\right) = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(6)　数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + n^2 - n$ を満たすとき，a_n が 2025 を超える最小の自然数 n は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

(7)　$\angle\mathrm{OAB}$ を直角とする直角三角形 OAB がある。辺 OA を $a : b$ に内分する点を P，辺 OB を $b : (a + b)$ に内分する点を Q とし，AQ と BP の交点を R とする。$\mathrm{OA} = \mathrm{QB}$ のとき，$\angle\mathrm{PRQ} = \boxed{\text{ソタチ}}^\circ$ である。ただし，a，b は正の実数とする。

(8)　実数で定義される関数 $f(x) = 3^{2x} + 3^{-2x} + 3^{x+1} - 3^{-x+1}$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

(9)　5 人の身長 (cm) のデータ 161　185　163　179　167 の分散は $\boxed{\text{ナニ}}$ である。

解答

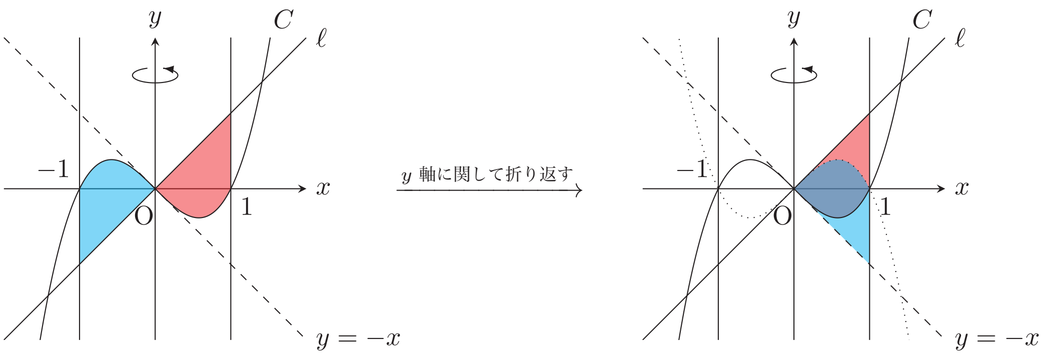
解答記号	正解
ア	1
$\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$	$\dfrac{4}{3}$
エオ	36
カキ	-1
クケ	54
$\dfrac{\text{コサ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{-1}{4}$

解答記号	正解
スセ	20
ソタチ	±±±
$\dfrac{\text{ツテ}}{\text{ト}}$	$\dfrac{-1}{4}$
ナニ	88

解説

(1)　$y' = 3x^2 - 1$ であるので，$x = 0$ における接線の傾きは -1．したがって，$x = 0$ における法線 ℓ の傾きは **1** である．

題意の領域は，左下図のようになり，$x \leqq 0$ の部分を y 軸に関して折り返すと，右下図のようになる．この領域を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めればよい．領域は x 軸に関して対称であるため，$y \geqq 0$ の部分を考える．



$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲でつねに $x \geqq -x^3 + x$ であることに注意すると，この領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めるには，円柱から円錐を除けばよい．よって，

$$\frac{1}{2}V = 1^2\pi \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^2\pi \cdot 1 \iff V = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\pi$$

(2)

$$\left(\frac{\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)} \right)^n = 1$$

$$\iff \left(\cos\left(\frac{29\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{29\pi}{18}\right) \right)^n = 1$$

$$\iff \cos\frac{29n\pi}{18} + i\sin\frac{29n\pi}{18} = \cos 0 + i\sin 0$$

であるので

$$\frac{29n\pi}{18} = 0 + 2k\pi \iff 29n = 36k \ (k \text{ は自然数})$$

を得る．29 と 36 は互いに素であるので，最小の自然数 n の値は **36** である．

(3)　$x^2 - 2ax + 4a + 5 = 0$ が実数解をもつので，判別式を D とすると，

$$D/4 = a^2 - 4a - 5 \geqq 0 \iff a \leqq -1,\ 5 \leqq a$$

が a のとり得る値の範囲である．また，解と係数の関係から $\begin{cases} \alpha+\beta=2a \\ \alpha\beta=4a+5 \end{cases}$ を得るので，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=4a^2-8a-10\\&=4(a-1)^2-14\end{aligned}$$

$a \leqq -1,\ 5 \leqq a$ であることに注意すると，$a=\mathbf{-1}$ のとき最小値 2 をとる．

(4)　ちょうど n 回投げて終了となるには，$(n-1)$ 回までに 1 が 9 回出て，n 回目に 1 が出ればよいので

$$\begin{aligned}p_n&={}_{n-1}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right)^{n-10}\cdot\frac{1}{6}\\&={}_{n-1}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-10}=\frac{5^{n-10}\cdot(n-1)!}{6^n\cdot 9!(n-10)!}\end{aligned}$$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n}&=\frac{5^{n-9}\cdot n!}{6^{n+1}\cdot 9!(n-9)!}\div\frac{5^{n-10}\cdot(n-1)!}{6^n\cdot 9!(n-10)!}\\&=\frac{5n}{6(n-9)}\end{aligned}$$

となり，$n \geqq 10$ であることを考慮すると

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}>1 \iff 10 \leqq n<54$$
$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=1 \iff n=54$$
$$\frac{p_{n+1}}{p_n}<1 \iff n>54$$

である．これより，

$$p_{10}<p_{11}<p_{12}<\cdots\cdots<p_{53}<p_{54}=p_{55}>p_{56}>p_{57}>\cdots\cdots$$

であることがわかるので，p_n は $n=54,\ 55$ のときに最大となる．よって p_n を最大とする最小の n は $n=\mathbf{54}$ である．

(5)　$t=-x$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ である．これより

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)&=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{4t^2-t}-2t\right)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4t^2-t}-2t\right)\left(\sqrt{4t^2-t}+2t\right)}{\sqrt{4t^2-t}+2t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{4t^2-t}+2t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-\dfrac{1}{t}}+2}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\end{aligned}$$

(6)　$a_{n+1}-a_n=n^2-n$ であるので，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2}n(n-1)$$
$$= 1 + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

となり，これは $n=1$ のときも成り立つ．したがって

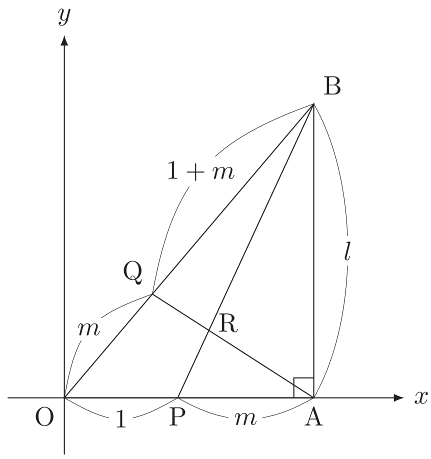
$$a_n > 2025 \iff 1 + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) > 2025 \iff n(n-1)(n-2) > 6072$$

である．$f(n) = n(n-1)(n-2)$ とすると，$n \geqq 2$ において $f(n)$ は単調に増加し，$f(19) = 5814$，$f(20) = 6840$ である．よって a_n が 2025 を超える最小の自然数 n は，$n = \mathbf{20}$ である．

(7)　与条件から，実際の長さを

$$\mathrm{OA} = a + b,\ \mathrm{OB} = b + (a+b) = a + 2b$$

とみてもよい．さらに，$m = \dfrac{b}{a}\ (>0)$ とおき，



$$\mathrm{OA} = a + ma = (1+m)a$$
$$\mathrm{OB} = a + 2ma = (1+2m)a$$

とすれば，結局

$$\mathrm{OA} = 1 + m,\ \mathrm{OB} = 1 + 2m$$

としても一般性を失わないことがわかる．このとき，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 - \mathrm{OA}^2} = \sqrt{2m + 3m^2}\ (= l \text{ とおく})$$

となるので，座標平面上で点 $\mathrm{A}(1+m,\ 0)$, $\mathrm{B}(1+m,\ l)$ をとることにする．このとき，

$$\tan\angle\mathrm{OAQ} = \frac{ml}{(1+m)^2},\quad \tan\angle\mathrm{APB} = \frac{l}{m}$$

となる．これらから

$$\tan\angle\mathrm{PRQ} = \tan(\angle\mathrm{OAQ} + \angle\mathrm{APB})$$
$$= \frac{\dfrac{ml}{(1+m)^2} + \dfrac{l}{m}}{1 - \dfrac{ml}{(1+m)^2}\cdot\dfrac{l}{m}}$$
$$= \frac{(1+2m+2m^2)\sqrt{2m+3m^2}}{m(1-2m^2)}$$

となる．したがって，m の変化に伴って $\tan\angle\mathrm{PRQ}$ も変化するので，$\angle\mathrm{PRQ}$ は**一定値にならない**．

$\boxed{\text{注釈}}$

もし問題の設定が「$\angle\mathrm{AOB}$ を直角とする直角三角形 OAB」であれば，$\angle\mathrm{PRQ} = 135^\circ$（一定）となる．
問題文のままであれば，$\angle\mathrm{PRQ}$ は鋭角，直角，鈍角のいずれにもなり得る．

(8)　$f(x) = (3^{2x} + 3^{-2x}) + 3(3^x - 3^{-x})$ であるから，$3^x - 3^{-x} = t$ とおくと，

$$f(x) = (3^x - 3^{-x})^2 + 2 + 3(3^x - 3^{-x})$$
$$= t^2 + 2 + 3t$$
$$= \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

と表される．t は全ての実数値をとり得るので，$f(x)$ は $t = 3^x - 3^{-x} = \dfrac{3}{2}$ のときに最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$ をとる．

(9)　5 人の身長データの平均は 171 であるから，5 つのデータからそれぞれ 171 ずつ引いた値すなわち偏差は次のようになる．

$$-10,\quad 14,\quad -8,\quad 8,\quad -4$$

よって，分散を s^2 とすると，

$$s^2 = \frac{1}{5}\{(-10)^2 + 14^2 + (-8)^2 + 8^2 + (-4)^2\} = \mathbf{88}$$

である．

問題 2

2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 + 2(k+1)x + 4k + 3$ と $C_2 : y = x^2 + 2(k-1)x - 4k + 3$ があり，直線 ℓ が 2 つの放物線の両方に接している。ただし，k は実数とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) C_1 と C_2 および直線 ℓ により囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

(1) $y = x^2 + 2(k+1)x + 4k + 3$ より $y' = 2x + 2k + 2$，$y = x^2 + 2(k-1)x - 4k + 3$ より $y' = 2x + 2k - 2$ であるから，C_1 上の点 $(t,\ t^2 + 2(k+1)t + 4k + 3)$，および C_2 上の点 $(s,\ s^2 + 2(k-1)s - 4k + 3)$ における接線の方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} y &= (2t + 2k + 2)(x - t) + t^2 + 2(k+1)t + 4k + 3 \\ &= (2t + 2k + 2)x - t^2 + 4k + 3 \cdots ① \\ y &= (2s + 2k - 2)(x - s) + s^2 + 2(k-1)s - 4k + 3 \\ &= (2s + 2k - 2)x - s^2 - 4k + 3 \cdots ② \end{aligned}$$

となる．これらが題意の直線 ℓ となるとき，①, ② が一致するので，

$$\begin{cases} 2t + 2k + 2 = 2s + 2k - 2 & \cdots ③ \\ -t^2 + 4k + 3 = -s^2 - 4k + 3 & \cdots ④ \end{cases}$$

が得られる．③, ④ を解いて $(t,\ s) = (-2k-1,\ -2k+1)$ となるので，① あるいは ② に代入して求める直線 ℓ の方程式は $\boldsymbol{y = -2kx - 4k^2 + 2}$ である．

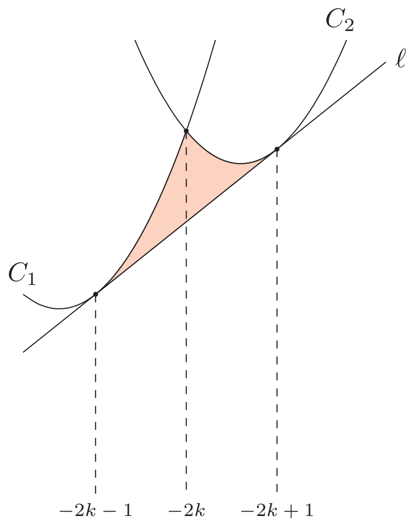
注釈

以下のような解法も考えられる．

- C_1 上の点 $(t,\ t^2 + 2(k+1)t + 4k + 3)$ における接線（本解における ① ）が C_2 と接すればよいので，連立した 2 次方程式の判別式が 0 となる条件から t を求める．
- ℓ の方程式を $y = ax + b$ とおき，これが C_1 および C_2 の両方と接することから $a,\ b$ を決定してもよい（判別式を用いる）．

(2) C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $-2k$ であるから，求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_{-2k-1}^{-2k} \{x^2 + 2(k+1)x + 4k + 3 - (-2kx - 4k^2 + 2)\}\,dx \\ &\quad + \int_{-2k}^{-2k+1} \{x^2 + 2(k-1)x - 4k + 3 - (-2kx - 4k^2 + 2)\}\,dx \\ &= \int_{-2k-1}^{-2k} \{x + (2k+1)\}^2\,dx + \int_{-2k}^{-2k+1} \{x + (2k-1)\}^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\{x + (2k+1)\}^3\right]_{-2k-1}^{-2k} + \left[\frac{1}{3}\{x + (2k-1)\}^3\right]_{-2k}^{-2k+1} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$



問題3

$m,\ n$ を整数とする。$6^m = 2^n + 4$ を満たす $(m,\ n)$ の組をすべて求めよ。

解答

$6^m = 2^n + 4 > 4$ より $m \geqq 1$．よって，$2^n = 6^m - 4 \geqq 2$ より $n \geqq 1$ である．

$m > n$ とすると，$6^m - 2^n > 6^n - 2^n \geqq 4$ となるので矛盾する．よって，$m \leqq n$ である．

$$6^m = 2^n + 4$$

$$\iff 2^m(3^m - 2^{n-m}) = 4$$

であるが，$2^m,\ 3^m - 2^{n-m}$ はともに整数なので，$m \geqq 1$ であることを考慮すると，$2^m = 2,\ 4$ すなわち $m = 1,\ 2$ の 2 通りを考えればよい．

(i)　$m = 1$ のとき，$6 = 2^n + 4$ より $n = 1$.

(ii)　$m = 2$ のとき，$36 = 2^n + 4$ より $n = 5$.

以上より，$\boldsymbol{(m,\ n) = (1,\ 1),\ (2,\ 5)}$ である．

講評

問題 1［小問集合］
((1) 標準 (2) やや易 (3) やや易 (4) 標準 (5) やや易 (6) やや易 (7) – (8) やや易 (9) 易)
例年は平易な問題の中に解きにくい問題が混ざっていたが，今年度は (7) 以外典型的な問題が並んだ．(1)，(4) あたりで点差がつくと思われる．なお，(7) は解答不能であるため，裏表紙に書かれている「マークシート解答上の注意」に倣って解答欄すべてに 「±」を入れている．

問題 2［数学 II の微積分］(やや易)
2 つの放物線とそれらの共通接線とで囲まれる図形の面積，というこの分野では定番の出題であった．文字定数が含まれているため処理に手間取ったかもしれないが，多くの受験生が演習したことのあるであろう題材だっただけにこの問題は確実に得点しておきたい．

問題 3［整数］(やや難)
$(m,\ n)$ の組をいくつか見つけることは難しくないが，それが全てであると議論することがやや難しい．m の値を絞り込んで考えることができたかどうかがポイントとなる．

2024 年度前期と比較すると，すべての大問で易化した．特筆すべきは数学 III の積分からの出題がなかったことであろう．問題 1 で 7 題，問題 2 で完答し，問題 3 で部分点を取れるかの勝負になる．
1 次合格のための目標は 75%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ