解答速報

藤田医科大学（ふじた未来入試）　数学

2024年11月10日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1)　35^{300} は $\boxed{アイウ}$ 桁の整数であり，最高位の数字は $\boxed{エ}$ である。ただし
$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$，$0.8450 < \log_{10} 7 < 0.8451$ である。

(2)　$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{11}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{11}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{11}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{11}}$ のとき，$a^2 = \boxed{オカ}$ である。

(3)　a，b が実数で $x^3 + ax^2 + 39x + b = 0$ が 2 重解 $x = -3$ を持つとき，他の 1 つの解は $x = \boxed{キク}$ である。

(4)　曲線 $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$ 上の点 $(9,\ 3)$ における曲線の接線の方程式は $\boxed{ケ}x + \boxed{コ}y - 39 = 0$ である。

(5)　$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = \dfrac{3(2+\sqrt{3})}{4}$，$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ のとき $\cos^2(\alpha - \beta) = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

(6)　等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{12} = 5$，$S_{24} = 20$ のとき，$S_{60} = \boxed{スセソ}$ である。

(7)　複素数 $z = \dfrac{3\sqrt{3}+3i}{5+5i}$ について，z^n が実数となる最小の自然数 n は $\boxed{タチ}$ である。ただし i は虚数単位とする。

(8)　曲線 $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ 上の点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$ における曲線の接線が，点 A 以外で曲線 $y = f(x)$ と交わる点の y 座標は $\boxed{ツテ}$ である。

(9)　1，2，3，4，5，6，7 の 7 個の数字の中から異なる 3 個の数字を並べてできる 3 桁の整数は $\boxed{トナニ}$ 個であり，そのうち 9 の倍数は $\boxed{ヌネ}$ 個である。

(10)　変量 x のデータが

$$60 \quad 42 \quad 6 \quad 96 \quad 60 \quad 42$$

のように与えられているとき，変量 x のデータの標準偏差は $\boxed{ノハ}$ である。

解答

解答記号	正解
アイウ	464
エ	1
オカ	32
キク	-5
ケ，コ	3，4
$\dfrac{サ}{シ}$	$\dfrac{3}{4}$

解答記号	正解
スセソ	605
タチ	12
ツテ	31
トナニ	210
ヌネ	24
ノハ	27

解説

(1)　$\log_{10} 35^{300} = 300\log_{10} 35 = 300(1+\log_{10} 7 - \log_{10} 2)$ と変形できる．
ここで $0.8450 < \log_{10} 7 < 0.8451$，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より

$$1.5439 < 1+\log_{10} 7 - \log_{10} 2 < 1.5441$$
$$\iff 463.17 < \log_{10} 35^{300} < 463.23$$

となる．また $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より $0.23 < \log_{10} 2$ であるので，

$$463 < \log_{10} 35^{300} < 463 + \log_{10} 2 \iff 10^{463} < 35^{300} < 2\cdot 10^{463}$$

したがって，35^{300} は **464** 桁の整数であり，最高位の数字は **1** である．

(2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{11}} &= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{11})+(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{11})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-11}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-3+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(-3-\sqrt{6})}{(-3+\sqrt{6})(-3-\sqrt{6})}\\ &= -\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{11}} &= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{11})+(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{11})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-11}\\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}\\ &= -\frac{6\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

以上より，$a = -\dfrac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{3} - \dfrac{6\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{3} = -4\sqrt{2}$ となるので，$a^2 = \mathbf{32}$ となる．

(3)　他の 1 つの解を $x=\alpha$ とすると，解と係数の関係より $(-3)\cdot(-3)+(-3)\alpha+(-3)\alpha = 39$ となる．これより，$\alpha = -5$ となるので，他の 1 つの解は $x = \mathbf{-5}$ である．

(4)　接線の公式を用いると，求める接線の方程式は

$$(9-3)(x-3)+(3+5)(y+5) = 100 \iff \mathbf{3}x+\mathbf{4}y-39=0$$

である．

(5)　与条件から，

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{3(2+\sqrt{3})}{4}$$
$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

を得る．これらを辺々加えることにより，

$$1 + 2\cos(\alpha-\beta) + 1 = 2+\sqrt{3} \iff \cos(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので，$\cos^2(\alpha-\beta) = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$ である．

(6)　この数列の初項を a，公比を r とする．$r=1$ とすると $S_{24} = 2S_{12}$ となるべきだが，これは与条件に反するので $r \fallingdotseq 1$ である．したがって

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{a(1-r^{12})}{1-r} = 5 \cdots ① \\ S_{24} &= \frac{a(1-r^{24})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^{12})}{1-r}(1+r^{12}) \\ &= 5(1+r^{12}) \end{aligned}$$

これと $S_{24} = 20$ を合わせて $r^{12} = 3$ を得る．したがって ① から $\dfrac{a}{1-r} = -\dfrac{5}{2}$ となるので

$$\begin{aligned} S_{60} &= \frac{a(1-r^{60})}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r}\{1-(r^{12})^5\} \\ &= -\frac{5}{2}(1-3^5) \\ &= \mathbf{605} \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} \arg z &= \arg(3\sqrt{3}+3i) - \arg(5+5i) \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる（一般角として表すこともできる）．したがって $\arg z^n = n\arg z = -\dfrac{n}{12}\pi$ であるから，k を整数として

$$z^n \text{ が実数} \iff -\frac{n}{12}\pi = k\pi \iff n = -12k$$

となるので，求める最小の自然数は $n = \mathbf{12}$ $(k=-1)$ である．

(8)　$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ より，$f'(-2) = 6$ が得られる．したがって，点 A における接線の方程式は，

$$y = 6(x+2) + 1 \iff y = 6x + 13$$

となる．これと $y=f(x)$ から y を消去すると

$$\begin{aligned} & x^3+x^2-8x-12=0 \\ \iff & (x+2)^2(x-3)=0 \\ \iff & x=-2,\ 3 \end{aligned}$$

が得られる．したがって，A 以外の交点の x 座標は $x=3$ なので，求める y 座標は $f(3)=\mathbf{31}$ である．

別解

上の解答では A での接線の方程式を求めたが，それを以下のように回避することもできる．

A での接線と $y=f(x)$ の共有点のうち，A 以外の点を B とし，B の x 座標を $x=\beta$ とする．A での接線の方程式を $y=px+q$ とし，これと $y=f(x)$ とから y を消去すると

$$x^3+x^2+(-2-p)x+1-q=0$$

となる．この方程式の解が $x=-2,\ \beta$ であり，そのうち -2 は重解であるから，解と係数の関係により

$$(-2)+(-2)+\beta=-1 \iff \beta=3$$

とわかる．したがって求める y 座標は $f(3)=\mathbf{31}$ である．

(9) 3 桁の整数の総数は ${}_7\mathrm{P}_3=7\cdot 6\cdot 5=\mathbf{210}$ 個である．また，9 の倍数となるとき，各位の数の和は 9 の倍数である．これを満たす各位の数字の組を挙げると

$$\{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{5,\ 6,\ 7\}$$

の 4 通りとわかるので，それぞれ各位の順列も考えることにより，9 の倍数は $4\cdot 3!=\mathbf{24}$ 個である．

(10) これらのデータの平均を $\overline{x}$ とすると，

$$\overline{x}=\frac{1}{6}(60+42+6+96+60+42)=51$$

となるので，各データに対する $x-\overline{x}$ の値は

$$9,\ -9,\ -45,\ 45,\ 9,\ -9$$

となる．したがって，求める標準偏差を s とすると

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{1}{6}(4\cdot 9^2+2\cdot 45^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 9^2(2+5^2)} \\ &= \sqrt{9^2\cdot 9} \\ &= \mathbf{27} \end{aligned}$$

別解

各データの最大公約数である 6 で各データを割って，

$$10,\ 7,\ 1,\ 16,\ 10,\ 7$$

と変換しておく．これらについての標準偏差を求め，それが $\dfrac{s}{6}$ に等しいことから s を求めることもできる．

また，最大公約数が 6 であることを利用すると，(分散) $=$ (2 乗の平均) $-$ (平均の 2 乗) を計算することも容易ではある．

$$s^2=\frac{1}{6}(60^2+42^2+6^2+96^2+60^2+42^2)-51^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 6(100 + 49 + 1 + 256 + 100 + 49) - 2601 \\
&= 3330 - 2601 \\
&= 729
\end{aligned}
$$

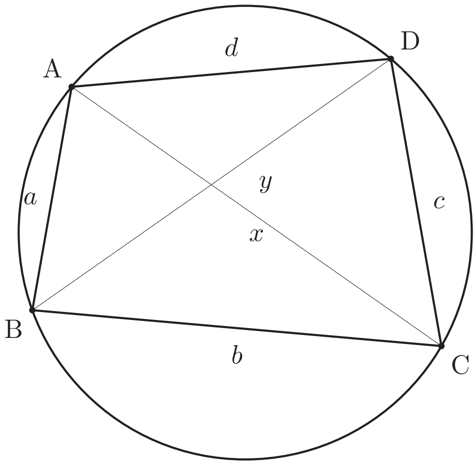
であることから $s = \mathbf{27}$ を得る.

問題 2

四角形 ABCD が円に内接するとき，$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} + \mathrm{BC} \cdot \mathrm{DA} = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{\text{解答}}$

$\boxed{\text{解法 1}}$



$\mathrm{AB} = a,\ \mathrm{BC} = b,\ \mathrm{CD} = c,\ \mathrm{DA} = d,\ \mathrm{AC} = x,\ \mathrm{BD} = y$ とおく．$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{ADC} = \pi$ であるから，

$$\cos\angle\mathrm{ADC} = \cos(\pi - \angle\mathrm{ABC}) = -\cos\angle\mathrm{ABC}$$

である．したがって，

$$\cos\angle\mathrm{ABC} + \cos\angle\mathrm{ADC} = 0$$

$$\iff \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab} + \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd} = 0$$

$$\iff x^2 = \frac{a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab}{ab+cd} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

より

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

となる． $a \to b,\ b \to c,\ c \to d,\ d \to a$ という文字の入れ替えにより

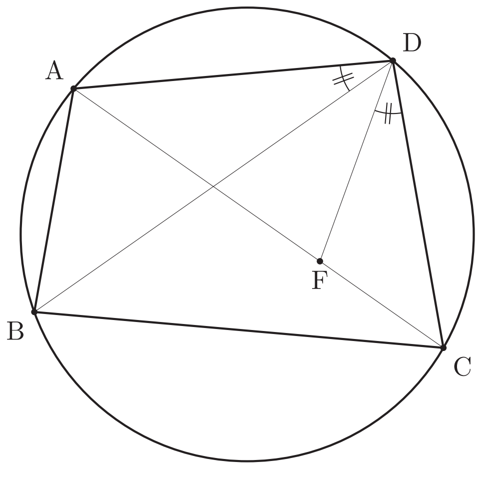
$$y = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

も得られるので，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} &= xy \\ &= \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \cdot \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}} \\ &= ac+bd \\ &= \mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} + \mathrm{BC} \cdot \mathrm{DA}\end{aligned}$$

が成り立つ． （証明終）

$\boxed{\text{解法 2}}$



図のように， $\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{FDC}$ となるように 線分 AC 上に点 F をとる．円周角の定理により $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{FCD}$ が成り立つので，$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{FCD}$ であることから $\mathrm{AB} : \mathrm{BD} = \mathrm{FC} : \mathrm{CD}$ より

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{FC} \cdots ①$$

が成り立つ．また，$\angle\mathrm{ADF} = \angle\mathrm{BDC}$ であり，円周角の定理により $\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{DBC}$ が成り立つので， $\triangle\mathrm{AFD} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$ であることから $\mathrm{AF} : \mathrm{AD} = \mathrm{BC} : \mathrm{BD}$ より

$$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{AF} \cdots ②$$

も成り立つ．① + ② より

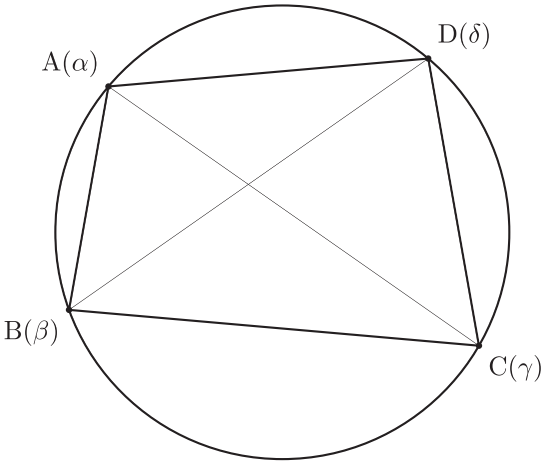
$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} + \mathrm{BC} \cdot \mathrm{DA} = \mathrm{BD} \cdot (\mathrm{AF} + \mathrm{FC}) = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}$$

が成り立つ．　(証明終)

解法 3

一般に 4 つの複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ に関して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)\\
=&\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\delta+\gamma\delta\\
=&-\alpha\delta-\beta\gamma+\alpha\beta+\gamma\delta\\
=&(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)
\end{aligned}
$$



これより次がわかる．

$$
\begin{aligned}
|(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)|&=|(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)|\\
&\leqq|(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)|+|(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)|
\end{aligned}
$$

つまり $\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta),\ \mathrm{C}(\gamma),\ \mathrm{D}(\delta)$ とおくと， $\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\leqq\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}$ が成り立つ．(トレミーの不等式)

特に ABCD がこの順に円周上に並んでいる場合には $\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{DCB}=\pi$ が成り立つので

$$
\begin{aligned}
&\arg\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}+\arg\frac{\beta-\gamma}{\delta-\gamma}=\pi\\
\Longleftrightarrow\ &\arg\frac{(\delta-\alpha)(\beta-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}=\pi\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(\delta-\alpha)(\beta-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}\ \text{は負の実数}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}\ \text{は正の実数}
\end{aligned}
$$

がわかる．この場合には

$$
|(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)|=|(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)|+|(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)|
$$

が成り立つので，$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}$ が成り立つ．　(証明終)

問題 3

自然数 n に対し，各桁が全て 1 の n 桁の自然数を $f(n)$ とする。例えば $f(2)=11,\ f(4)=1111$ である。

(1)　$f(n)$ を n の式で表せ。

(2)　自然数 $l,\ m$ に対し l が m の倍数のとき，$f(l)$ は $f(m)$ の倍数となることを証明せよ。

(3)　$f(n+1)$ と $f(n)$ が互いに素であることを証明せよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$f(n)=1+10+100+\cdots+10^{n-1}=\dfrac{10^n-1}{10-1}=\boldsymbol{\dfrac{10^n-1}{9}}$

(2)　自然数 k を用いて $l=km$ と表せるので,

$$\begin{aligned} f(l) &= \frac{10^{km}-1}{9} \\ &= \frac{(10^m-1)(10^{(k-1)m}+10^{(k-2)m}+10^{(k-3)m}+\cdots+10^{2m}+10^m+1)}{9} \\ &= (10^{(k-1)m}+10^{(k-2)m}+10^{(k-3)m}+\cdots+10^{2m}+10^m+1)f(m) \end{aligned}$$

より，$f(l)$ は $f(m)$ の倍数である.　（証明終）

(3)

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{10^{n+1}-1}{9} \\ &= \frac{10(10^n-1)+9}{9} \\ &= 10f(n)+1 \end{aligned}$$

より，ユークリッドの互除法を用いると,

$$\gcd(f(n+1),\ f(n))=\gcd(f(n),\ 1)=1$$

となるので（$\gcd(a,\ b)$ は a と b の最大公約数である），$f(n+1)$ と $f(n)$ は互いに素である.　（証明終）

$\boxed{\text{別解}}$

$$f(n+1)-10f(n)=1$$

より，$f(n+1)$ と $f(n)$ の最大公約数を g とおいて

$$f(n+1)=gQ(n+1),\ f(n)=gQ(n)$$

とすると,

$$g(Q(n+1)-10Q(n))=1$$

となることから，$g=1$ となるので，$f(n+1)$ と $f(n)$ は互いに素である.　（証明終）

講評

問題 1［小問集合］((1) やや易 (2) 標準 (3) やや易 (4) 易 (5) やや易 (6) やや易 (7) 標準 (8) やや易 (9) 易 (10) やや易)

昨年度と比べると，全体的に解きやすく，受験生が解法で悩む要素が少なくなっている．この小問集合でなるべくとりこぼしなく高得点を狙いたい．(2), (6), (10) の計算をしっかり合わせきることができたかどうかで差がついているかもしれない．

問題 2［トレミーの定理の証明］(やや難)

近年藤田医科大学で頻出の「有名事実の証明問題」であった．受験生が一番思いつくであろう証明方法としては，余弦定理の利用が想定されたのでこの方針での証明を本解としている．ただ，経験したことがないと結論にたどり着くのは難しかったかもしれない．3 通りの証明方法を記したが，他に正弦定理を使う証明方法もある．

問題 3［整数］(やや難)

(1) は等比数列の和になっている．(2) は $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$ の因数分解を知っておきたいが，知らない受験生も一定数いるだろう．(3) は互いに素であることを証明する問題を解いたことがあるかどうかで差が出そう．(2)(3) は高 3 生には難しいかもしれない．

本年度から試験の名称が「学習能力適性検査」に変わっている．

例年に比べると，問題 1 の小問集合の難易度が穏やかになっている．記述の問題 2，3 は，処理量としては少なく，解いた経験があれば時間はかからなかっただろうが，方針が立たず立ち往生した受験生も多いと思われる．問題 1 を満点に近いところまで仕上げ，問題 2，3 では何とか部分点を稼いで半分弱ずつくらいとりたいところである．目標点は 70%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ