医学部進学予備校
メビオ
医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

# 解答速報

# 福岡大学医学部　数学

2025年 2月 2日実施

[I]　次の $\boxed{\phantom{xx}}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i)　三角形の頂点を反時計回り（時計の針の回転と逆向き）に A, B, C とする。三角形の頂点を動く点 P は 1 秒毎に $\dfrac{1}{6}$ の確率で反時計回りに隣の頂点に移動し，$\dfrac{1}{6}$ の確率で時計回りに隣の頂点に移動し，$\dfrac{2}{3}$ の確率でその場に留まる。P が最初 A の位置にいるとき，2 秒後に P が B の位置にいる確率は $\boxed{(1)}$ であり，最初の 3 秒の間に P が一度も B の位置にいない確率は $\boxed{(2)}$ である。

(ii)　四面体 OABC において，辺 OA の中点を P，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を Q，辺 BC を 2 : 3 に内分する点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \boxed{(3)}$ である。また，辺 OC 上に点 S をとる。3 点 P, Q, R を通る平面 PQR 上に S があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \boxed{(4)}$ である。

(iii)　放物線 $C : y = x^2 + 5x + 4$ が直線 $\ell_1 : y = 3x + k + 1$ と異なる 2 点で交わり，直線 $\ell_2 : y = 3x + k$ とも異なる 2 点で交わるとき，$k$ の値の範囲は $\boxed{(5)}$ である。
この範囲の $k$ に対して $C$ と $\ell_1$ の 2 つの交点と，$C$ と $\ell_2$ の 2 つの交点を頂点とする四角形の面積が 2 となる $k$ の値は $\boxed{(6)}$ である。

解答

(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{125}{216}$　(3) $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　(4) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　(5) $k > 3$　(6) $\dfrac{57}{16}$

解説

(i)　反時計回りに動くという事象を $L$，時計回りに動くという事象を $R$，その場に留まるという事象を $S$ とすると，2 秒後に P が B の位置にいるのは次の場合である.

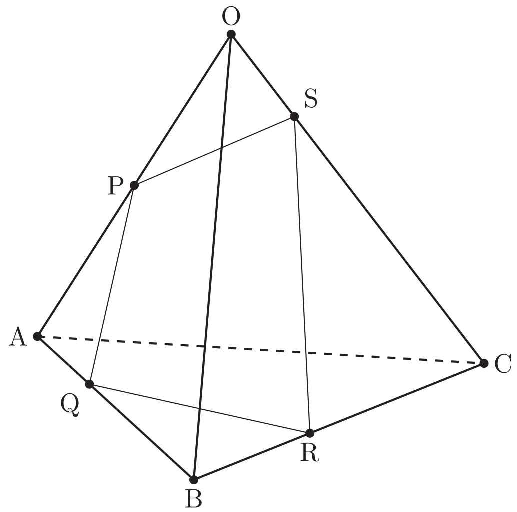
| 各事象が起こる回数 | 確率 |
| --- | --- |
| $R$ : 2 回 | $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$ |
| $L$ : 1 回，$S$ : 1 回 | ${}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{9}$ |

したがって，2 秒後に P が B の位置にいる確率は $\dfrac{1}{36} + \dfrac{2}{9} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$ である.

次に，3 秒の間に P が一度も B の位置にいないためには,「P が，B の位置にいない状態からの移動におい

て B に移動しない」ということが 3 回起こればよい． 1 回の移動でこれが起こる確率は $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$ であるから，求める確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{125}{216}}$ である．

(ii)




$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\end{aligned}$$

である．

次に，点 S は平面 PQR 上の点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\&=(1-s-t)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}+t\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}s-\frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{1}{3}s+\frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

である．

また点 S は直線 OC 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は一次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数はともに 0，すなわち

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}s-\dfrac{1}{2}t&=0\\ \dfrac{1}{3}s+\dfrac{3}{5}t&=0\end{cases}$$

が成り立つ．これを解いて $(s,\ t)=\left(-\dfrac{9}{8},\ \dfrac{5}{8}\right)$ となるので， $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$ である．

(iii) 放物線 $C_1$ と直線 $\ell_1$ が異なる 2 点で交わるとき，

$$x^2+5x+4=3x+k+1 \iff x^2+2x+(3-k)=0\cdots①$$

は異なる 2 つの実数解をもつので判別式を $D_1$ とすると，$D_1>0$ より

$$\frac{D_1}{4}=1-(3-k)>0 \iff k>2\cdots②$$

が成り立つ．また，放物線 $C_1$ と直線 $\ell_2$ が異なる 2 点で交わるとき，

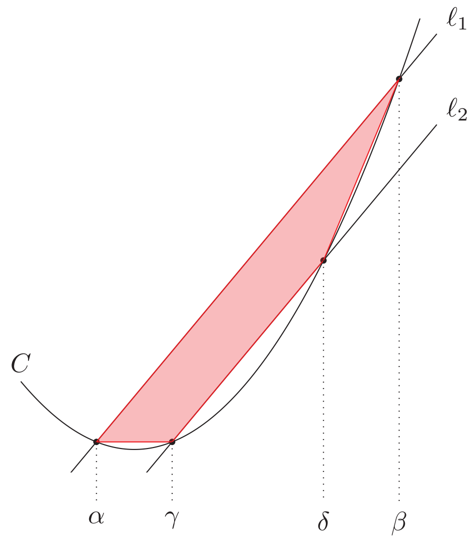
$$x^2+5x+4=3x+k \iff x^2+2x+(4-k)=0\cdots③$$

は異なる 2 つの実数解をもつので判別式を $D_2$ とすると，$D_2>0$ より

$$\frac{D_2}{4}=1-(4-k)>0 \iff k>3\cdots④$$

が成り立つ．したがって，放物線 $C$ が直線 $\ell_1$ とも $\ell_2$ ともそれぞれ異なる 2 点で交わるような $k$ の値の範囲は $\boldsymbol{k>3}$ である．

このとき，$C$ と $\ell_1$ の共有点の $x$ 座標を $\alpha$, $\beta$ $(\alpha < \beta)$，$C$ と $\ell_2$ の共有点の $x$ 座標を $\gamma$, $\delta$ $(\gamma < \delta)$ とする．$\ell_1$ と $\ell_2$ 間の $y$ 軸方向の距離が 1 であることに注意すると題意より四角形の面積について




$$\frac{1}{2} \times \{(\beta - \alpha) + (\delta - \gamma)\} \times 1 = 2 \cdots ⑤$$

が成り立つ（すなわち，上底の長さが $\beta - \alpha$，下底の長さが $\delta - \gamma$ で高さが 1 の台形の面積と同じである）．ここで，①, ③ の解と係数の関係を用いると，

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{(-2)^2 - 4(3 - k)} = 2\sqrt{k - 2}$$

$$\delta - \gamma = \sqrt{(\delta + \gamma)^2 - 4\delta\gamma} = \sqrt{(-2)^2 - 4(4 - k)} = 2\sqrt{k - 3}$$

であるから，

$$⑤ \iff \sqrt{k - 2} + \sqrt{k - 3} = 2$$

となる．この式を $\sqrt{k - 2} = 2 - \sqrt{k - 3}$ と変形し，$3 < k (< 7)$ の条件のもとで 2 乗すると，

$$k - 2 = 4 - 4\sqrt{k - 3} + (k - 3) \iff \sqrt{k - 3} = \frac{3}{4}$$

となるので，これより $k = \boldsymbol{\dfrac{57}{16}}$ を得る（これは $3 < k (< 7)$ をみたす）．

**[II]** 次の $\boxed{\phantom{(1)}}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) 数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{12}n(n+7)$ を満たすとき，一般項は $a_n = \boxed{(\ 1\ )}$ である。

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{2025} \cos(\pi a_n)$ の値は $\boxed{(\ 2\ )}$ である。

(ii) 10 個のデータ $-5,\ -2,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15$ の平均値を $m$, 中央値を $M$ とすると $(m,\ M) = \boxed{(\ 3\ )}$ である。この 10 個のデータに $M$ と異なる 1 個のデータ $a$ を加えてできる 11 個のデータの平均値を $m'$，中央値を $M'$ とする。このとき，$\dfrac{m'-m}{M'-M} = 101$ となる $a$ の値をすべて求めると $a = \boxed{(\ 4\ )}$ である。

解答

(1) $\dfrac{n+3}{6}$　(2) $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　(3) $(6,\ 7)$　(4) $-1105,\ 1117,\ \dfrac{7771}{1110}$

解説

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ とおくと，$S_n = \dfrac{1}{12}n(n+7)$ である．$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$ であるので，

$$a_n = \frac{1}{12}n(n+7) - \frac{1}{12}(n-1)(n+6) = \frac{n+3}{6} \cdots (*)$$

と求まる．ここで，$a_1 = S_1$ であることより，$a_1 = \dfrac{1}{12}\cdot 1\cdot(1+7) = \dfrac{2}{3}$ と求まるので，$n=1$ のときにも $(*)$ は成り立つ．以上よりすべての自然数 $n$ に対して $a_n = \boldsymbol{\dfrac{n+3}{6}}$ と求まる．

次に $\displaystyle\sum_{n=1}^{2025} \cos(\pi a_n)$ について考える．$b_n = \cos(\pi a_n)$ とおき，自然数 $m$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} b_n = T_m$ とおく．$T_{2025}$ を求めたい．

$$b_{n+6} = \cos\left(\frac{n+3}{6}\pi + \pi\right) = -\cos\left(\frac{n+3}{6}\pi\right) = -b_n$$

となるので，

$$b_7 + b_1 = 0,\ b_8 + b_2 = 0,\ b_9 + b_3 = 0,\ b_{10} + b_4 = 0,\ b_{11} + b_5 = 0,\ b_{12} + b_6 = 0$$

となり，これより $T_{12} = 0$ とわかる．また

$$b_{n+12} = \cos\left(\frac{n+3}{6}\pi + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n+3}{6}\pi\right) = b_n$$

より数列 $\{b_n\}$ は 12 を周期とすることがわかる．以上より自然数 $k$ に対して $T_{12k} = 0$ となることがわかる．$2028 \equiv 0 \pmod{12}$ であるから，

$$\begin{aligned} T_{2025} &= T_{2028} - (b_{2026} + b_{2027} + b_{2028}) \\ &= 0 - (b_{10} + b_{11} + b_{12}) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0\right) \\ &= \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \end{aligned}$$

と求まる．

(ii)　データの平均値 $m$ は

$$m = \frac{(-5)+(-2)+2+5+6+8+9+10+12+15}{10} = 6$$

と求まる．また，中央値 $M$ については，データの個数が 10 個であるので値を小さい順に並べたときの 5 個目と 6 個目の平均を考えて $M = \dfrac{6+8}{2} = 7$ と求まる．以上から $(m,\ M) = \mathbf{(6,\ 7)}$ である．

次にこの 10 個のデータにデータ $a$ $(a \fallingdotseq 7)$ を加えたとき，平均値 $m'$ については $m' = \dfrac{60+a}{11}$ であるから，$m' - m = \dfrac{60+a}{11} - 6 = \dfrac{a-6}{11}$ である．以下，中央値 $M'$ について場合分けして考える．

(i)　$a \leqq 6$ のとき $M' = 6$ となるので

$$\frac{m'-m}{M'-M} = 101 \iff \frac{\frac{a-6}{11}}{6-7} = 101 \iff a = -1105 \ (a \leqq 6 \text{ を満たす})$$

(ii)　$6 < a < 8$ $(a \fallingdotseq 7)$ のとき $M' = a$ となるので

$$\frac{m'-m}{M'-M} = 101 \iff \frac{\frac{a-6}{11}}{a-7} = 101 \iff a = \frac{7771}{1110} \ (6 < a < 8 \text{ を満たす})$$

(iii)　$a \geqq 8$ のとき $M' = 8$ となるので

$$\frac{m'-m}{M'-M} = 101 \iff \frac{\frac{a-6}{11}}{8-7} = 101 \iff a = 1117 \ (a \geqq 8 \text{ を満たす})$$

以上により $a = \mathbf{-1105},\ \mathbf{\dfrac{7771}{1110}},\ \mathbf{1117}$ と求まる．

## ［III］ （記述問題）

$a$ を正の定数とする。2 曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{\cos x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2 : y = a\sin x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，次の問に答えよ。

(i) $C_1$ と $C_2$ の共有点がただ 1 つであるとき，その共有点における $C_1$ の接線 $\ell$ の方程式を求めよ。

(ii) (i) のとき，曲線 $C_1$，$C_2$ および $y$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

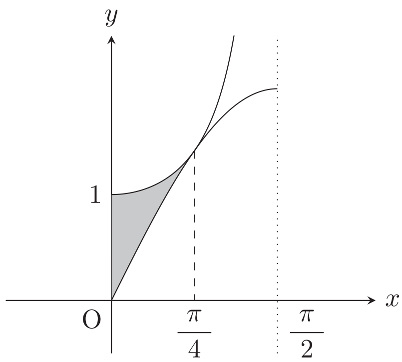
(i) $a \fallingdotseq 0$ であるから，$\dfrac{1}{\cos x} = a\sin x \iff \sin x\cos x = \dfrac{1}{a}$ と変形できる．

ここで，$y = \sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ のグラフを考えると，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で $y = \dfrac{1}{a}(>0)$ との共有点がただ 1 つとなるのは，$\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2} \iff a = 2$ のときであり，そのときの共有点の $x$ 座標は $\dfrac{\pi}{4}$ である．

$y = \dfrac{1}{\cos x}$ について，$y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ であるから，$C_1$ 上の点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$ における接線 $\ell$ の方程式は，

$$y = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \iff \boldsymbol{y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \sqrt{2}}$$

(ii) 求める面積を $S$ とすると，下図灰色部分であるから，$S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos x} - 2\sin x\right)dx$ である．ここで，




$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx \\
&= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}dx \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\{-\log(1 - \sin x) + \log(1 + \sin x)\} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C \ (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left[\log\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[-2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \sqrt{2} - 2 \\
&= \boldsymbol{\log(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2} - 2}
\end{aligned}$$

である．

講評

［I］［小問集合］(i) 標準 (ii) やや易 (iii) やや難

(i)　(1)(2) ともに標準的な設定．しかし手際の良さが問われる内容となっており，解けたにせよ所要時間には大きな差がついただろう．

(ii)　定番の問題．しっかり押さえておきたい．

(iii)　(5) は容易．(6) の面積は苦労した受験生が多かったと思われる．この問題も手際の良さで差がついただろう．

［II］［小問集合］(i) 標準 (ii) やや難

(i)　(1) の一般項は確実に正答したい．(2) は，様子がつかめてしまえばあとは 2025 を 12 で割った余りを求めれば答は容易に求まる．ここは差がつきそう．

(ii)　(3) は落とせない．(4) に関しては，$a$ と 6，8 の大小で場合分けしていくことになる．作業は単純だが，「外れ値」ともいえる値が答に含まれるので，受験生は自信が持てなかっただろう．また，正解の値は 3 つあり，すべて揃えてはじめて得点が生じるという採点基準なら，得点の平均は低くなりそうである．

［III］［数学Ⅲの微積分］（標準）

三角関数を含む関数について，共有点が 1 個となる条件と面積について考える問題であった．大問 III が数学Ⅲの微積分であることは例年通りだが，ここ数年は，かつて毎年のように題材とされていた指数関数・対数関数から離れていることには注目しておきたい．

(i)　$C_1$，$C_2$ から $y$ を消去して方程式の議論にもちこめばよいが，それぞれのグラフの凹凸から，接する 2 曲線として考えても答は出せる．

(ii)　(i) が突破できれば，ここは典型処理なので完答しやすいだろう．(i) の出来がこの大問全体の得点を大きく左右しそうである．

昨年に比べ易化した．[I]，[II] は，解きにくい問題が含まれるものの，平易な問題の方が多い．また [III] も例年に比べて取り組みやすい．

目標は 75% .

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ