医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

関西医科大学（前期）　数学

2025年 1月 25日実施

I　以下の設問に答えよ。

(1)　a は 0 でない定数とする。座標平面上に原点 O と点 A(2, 0) をとり，線分 OA を直径とする円を C とする。また原点 O を焦点，直線 $x=\dfrac{a}{2}$ を準線とする放物線を D とする。C と D をそれぞれ極方程式で表せ。

(2)　k を定数とし，$0<x<2\pi$ の範囲において，2 つの関数 $f(x)=2\cos x$，$g(x)=\dfrac{k}{2(1-\cos x)}$ を定める。$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

解答

(1)　C は中心 (1, 0)，半径 1 の円であるので x, y の方程式で表すと，

$$(x-1)^2+y^2=1 \iff x^2+y^2-2x=0$$

ここで $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $x^2+y^2=r^2$ を代入して，

$$r^2-2r\cos\theta=0 \iff r(r-2\cos\theta)=0$$

したがって，C の極方程式は $\boldsymbol{r=2\cos\theta}$ である（$r=0$ も含む）.

D の頂点は $\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$ である．放物線 D を x 軸方向に $-\dfrac{a}{4}$ 平行移動した放物線の方程式は，焦点が $\left(-\dfrac{a}{4},\ 0\right)$，準線が $x=\dfrac{a}{4}$ であり，

$$y^2=4\left(-\frac{a}{4}\right)x \iff y^2=-ax$$

と表すことができるので，放物線 D の方程式は

$$y^2=-a\left(x-\frac{a}{4}\right) \iff y^2+ax-\frac{a^2}{4}=0$$

となる．よってこれを極方程式で表すと，

$$r^2\sin^2\theta+ar\cos\theta-\frac{a^2}{4}=0$$
$$(1-\cos^2\theta)r^2+a(\cos\theta)r-\frac{a^2}{4}=0$$
$$\left\{(1+\cos\theta)r-\frac{a}{2}\right\}\left\{(1-\cos\theta)r+\frac{a}{2}\right\}=0$$
$$r=\frac{a}{2(1+\cos\theta)},\ \frac{-a}{2(1-\cos\theta)}$$

ここで $f(\theta)=\dfrac{a}{2(1+\cos\theta)}$，$g(\theta)=\dfrac{-a}{2(1-\cos\theta)}$ とおくと

$$g(\theta+\pi)=\frac{-a}{2\{1-\cos(\theta+\pi)\}}=\frac{-a}{2(1+\cos\theta)}=-f(\theta)$$

となるので，$r<0$ を許せば $r=f(\theta)$ と $r=g(\theta)$ は同値である．
したがって，D の極方程式は $\boldsymbol{r=\dfrac{a}{2(1+\cos\theta)}}$ である．

$r<0$ を許さないのであれば，以下のように場合分けして答えることになる．

$$\begin{cases} a>0 \text{ のとき } r=\dfrac{a}{2(1+\cos\theta)} \\ a<0 \text{ のとき } r=\dfrac{-a}{2(1-\cos\theta)} \end{cases}$$

(2)　$f(x)=g(x)$ から，

$$2\cos x=\frac{k}{2(1-\cos x)} \iff k=-4\cos^2 x+4\cos x$$

を得る．ここで，$t=\cos x$ とおくと，t と x の対応は

$$\begin{cases} t=1 \text{ のとき } x \text{ はなし} \\ -1<t<1 \text{ のとき } t \text{ の値 1 個につき } x \text{ は 2 個存在する} \\ t=-1 \text{ のとき } t \text{ の値 1 個につき } x \text{ は 1 個存在する} \end{cases}$$

である．これに注意しつつ，$y=-4t^2+4t=-4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+1\ (-1\leqq t<1)$ のグラフと，直線 $y=k$ との

共有点の個数を考えることにより，$\begin{cases} k>1 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ k=1 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ 0<k<1 \text{ のとき } 4 \text{ 個} \\ -8<k\leqq 0 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ k=-8 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ k<-8 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \end{cases}$

II　m と n を $m < n$ を満たす自然数とする。以下の設問に答えよ。

(1)　$2024 = n^2 - m^2$ を満たす $m,\ n$ の組は何通りあるか求めよ。

(2)　$2025 = n^2 - m^2$ を満たす $m,\ n$ の組は何通りあるか求めよ。

(3)　2025 を m から n までの連続する自然数の和で表すことができる $m,\ n$ の組は何通りあるか求めよ。

解答

(1)

$$n^2 - m^2 = 2024 \iff (n+m)(n-m) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$$

2024 は偶数であり $n+m$ と $n-m$ は偶奇が一致することから,

$$n+m = 2^{1+a_1} \cdot 11^{b_1} \cdot 23^{c_1}, \quad n-m = 2^{1+a_2} \cdot 11^{b_2} \cdot 23^{c_2}$$

とおける．ただし文字はすべて 0 以上の整数で $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 1$ である．

これより $(n+m,\ n-m)$ の整数の組合せは $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通りある．この 8 通りについて $n+m = n-m$ となることはないので，対称性より $n+m > n-m$ となる組合せは $8 \div 2 =$ **4 通り** である．

この 4 通りについて必ず $m < n$ となる自然数の組 $m,\ n$ が存在する．

(2)

$$n^2 - m^2 = 2025 \iff (n+m)(n-m) = 3^4 \cdot 5^2$$

(2025 は奇数であり $n+m$ と $n-m$ は偶奇が一致することからともに奇数となるが，2025 は素因数に 2 を持たないので特に考慮する必要はない)

$$n+m = 3^{d_1} \cdot 5^{e_1}, \quad n-m = 3^{d_2} \cdot 5^{e_2}$$

とおける．ただし文字はすべて 0 以上の整数で $d_1 + d_2 = 4,\ e_1 + e_2 = 2$ である．

これより $(n+m,\ n-m)$ の整数の組合せは $5 \times 3 = 15$ 通りある．このうち，$n+m = n-m = 3^2 \cdot 5$ のときは $m = 0$ となり不適である．それ以外の 14 通りについて対称性より $n+m > n-m$ となる組合せは $14 \div 2 =$ **7 通り** である．

この 7 通りについて必ず $m < n$ となる自然数の組 $m,\ n$ が存在する．

(3)　題意より

$$\frac{1}{2}(n+m)(n-m+1) = 2025 \iff (n+m)(n-m+1) = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$$

(4050 は偶数であり $n+m$ と $n-m+1$ は偶奇が逆となるが，4050 は素因数に 2 を一つしか持たないので特に考慮する必要はない)

$$n+m = 2^{f_1} \cdot 3^{g_1} \cdot 5^{h_1}, \quad n-m+1 = 2^{f_2} \cdot 3^{g_2} \cdot 5^{h_2}$$

とおける．ただし文字はすべて 0 以上の整数で $f_1 + f_2 = 1,\ g_1 + g_2 = 4,\ h_1 + h_2 = 2$ である．

これより $(n+m,\ n-m+1)$ の整数の組合せは $2 \times 5 \times 3 = 30$ 通りある．この 30 通りについて $n+m = n-m+1$ となることはないので，対称性より $n+m > n-m+1$ となる組合せは $30 \div 2 = 15$ 通りである．

そのうち $(n+m,\ n-m+1) = (4050,\ 1)$ のときは $n = m = 2025$ となり不適である．

以上より求める場合の数は $15 - 1 =$ **14 通り** である．

この 14 通りについて必ず $m < n$ となる自然数の組 $m,\ n$ が存在する．

III　n を自然数とし，m を 3 以上の整数とする。1，2，$\cdots$，m の m 個の数字の中から一つの数字を無作為に表示するルーレットがあり，このルーレットに表示される数字を用いてゲームの勝敗を次のように決める。

(i)　表示された数字が 1 であれば勝ちとしてゲームを終了する。

(ii)　表示された数字が，1 回前に表示された数字と同じであれは負けとしてゲームを終了する。(注意：1 回目に負けることはない。)

(iii)　ゲームの勝敗が決まらなかった場合は引き分けとし，再度ルーレットをまわして新たな数字を表示させる。

ちょうど n 回目に表示された数字によって，ゲームに勝つ確率を a_n，ゲームに負ける確率を b_n，引き分けとなる確率を c_n とする。以下の設問に答えよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$ を m を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ を c_n を用いて表せ。

(3)　c_n を m を用いて表せ。

(4)　$\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k}$ を m を用いて表せ。

解答

(1)　$a_1 = \dfrac{1}{m}$，$b_1 = 0$ であり，$n \geqq 2$ のとき $a_n = b_n$ なので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \boldsymbol{\frac{1}{m}}$.

(2)　「ちょうど n 回目に表示された数字によって引き分けとなる」の余事象は，「n 回目までに勝ちまたは負けとなる」であるので，

$$1 - c_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$$

すなわち，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \boldsymbol{1 - c_n}$$

である.

(3)　$c_1 = \dfrac{m-1}{m}$ である．任意の自然数 n に対して「$n+1$ 回目に表示された数字によって引き分けとなる」のは，「n 回目に表示された数字によって引き分けとなる」かつ「$n+1$ 回目の数字が 1 回前に表示された数字でも 1 でもない」ときであるので，

$$c_{n+1} = \frac{m-2}{m}c_n$$

がなりたつ．したがって，

$$c_n = \boldsymbol{\frac{(m-1)(m-2)^{n-1}}{m^n}}$$

である.

(4)　(1)(2) より，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left(1 - c_n + \frac{1}{m}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{2}\left(1 - c_n - \frac{1}{m}\right)$$

である．(3) より $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ なので,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

より,

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k} = \boldsymbol{\frac{m+1}{m-1}}$$

である.

Ⅳ xyz 空間において，$x^2+y^2 \leqq 1$ かつ $0 \leqq z \leqq 4x^3-3x+1$ を満たす領域を S とする。この領域 S のうち $\dfrac{1}{2} \leqq x$ を満たす部分を T，$x \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす部分を U とする。また，T の体積を V とする。以下の設問に答えよ。

(1) $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ。（答えだけで良い）

(2) V を求めよ。

(3) U の体積を V を用いて表せ。

(4) T を，z 軸の周りに反時計回りに 120° 回転させた立体のうち，S に含まれる部分の体積を V を用いて表せ。

解答

(1) $\cos 3\theta = \mathbf{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$

(2) 関数 $z=4x^3-3x+1$ の，$-1 \leqq x \leqq 1$ での増減を調べておく．$\dfrac{dz}{dx}=12x^2-3=3(2x-1)(2x+1)$ であるから

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dz}{dx}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
z	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

平面 $x=t$ で領域 S を切った断面は長方形となる．底辺の長さ（y 方向）は $2\sqrt{1-t^2}$ であり，高さ（z 方向）は $4t^3-3t+1$ となる．したがって

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2(4t^3-3t+1)\sqrt{1-t^2}dt$$

（ここで $t=\cos\theta$ とおくと）

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta+1)\sqrt{1-\cos^2\theta}(-\sin\theta)d\theta$$

（ここで (1) の結果を用いると）

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2(\cos 3\theta+1)\sin^2\theta d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 3\theta+1)(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\theta+\cos 3\theta-\cos 3\theta\cos 2\theta)d\theta$$

（ここで積和の公式を用いると）

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(1-\cos 2\theta+\cos 3\theta-\frac{1}{2}\cos 5\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta-\frac{1}{10}\sin 5\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{20}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}-\frac{9}{20}\sqrt{3}}$$

(3) U の体積を W とすると

$$V+W=\int_{-1}^{1} 2(4t^3-3t+1)\sqrt{1-t^2}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

ここで，偶関数・奇関数の性質を用い，積分には四分円の面積を用いた．

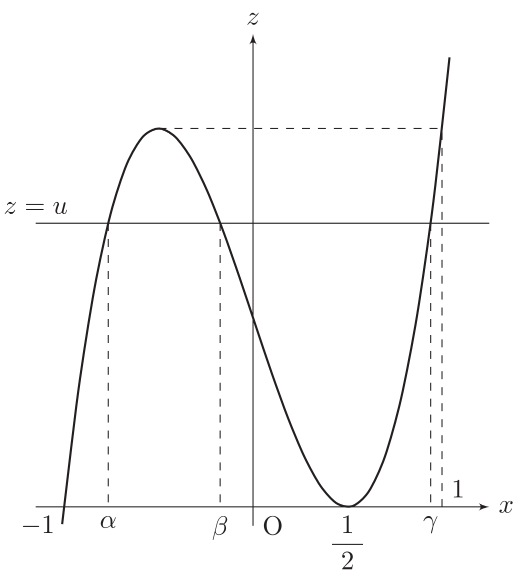
よって，

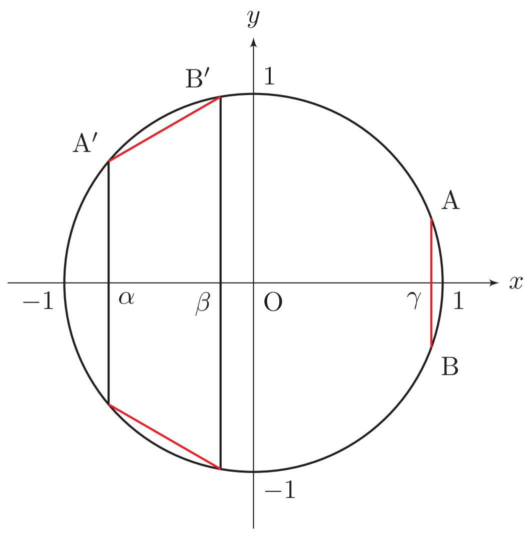
$$W = \boldsymbol{\pi - V}$$

(4)　$f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ とする．

$$f(\cos\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 1 = \cos 3\theta + 1$$

である．





平面 $z=u$ $(0<u<2)$ で立体 T を切った断面の切り口のうち，線分の部分の両端を図のように A, B とおき，その x 座標を $x=\gamma=\cos\theta$ とする．$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ と考えてよい．このとき，γ は $f(\gamma)=u$ を満たす．またこのとき方程式 $f(x)=u$ は γ 以外に実数解を 2 つもつ．この解を α, β $(\alpha<\beta<\gamma)$ とする．T を z 軸の周りに 120° 回した立体と S の共通部分を平面 $z=u$ で切ったときの断面は，T の断面を 120° 回した領域のうち $\alpha \leqq x \leqq \beta$ を満たす部分となる．

ここで，線分 AB を z 軸の周りに 120° 回した線分の両端を A′, B′ とすると，その x 座標はそれぞれ

$$\cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right),\quad \cos\left(-\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$$

となるが，

$$
\begin{aligned}
f\left(\cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)\right) &= \cos(3\theta + 2\pi) + 1 = \cos 3\theta + 1 = u \\
f\left(\cos\left(-\theta + \frac{2}{3}\pi\right)\right) &= \cos(-3\theta + 2\pi) + 1 = \cos 3\theta + 1 = u
\end{aligned}
$$

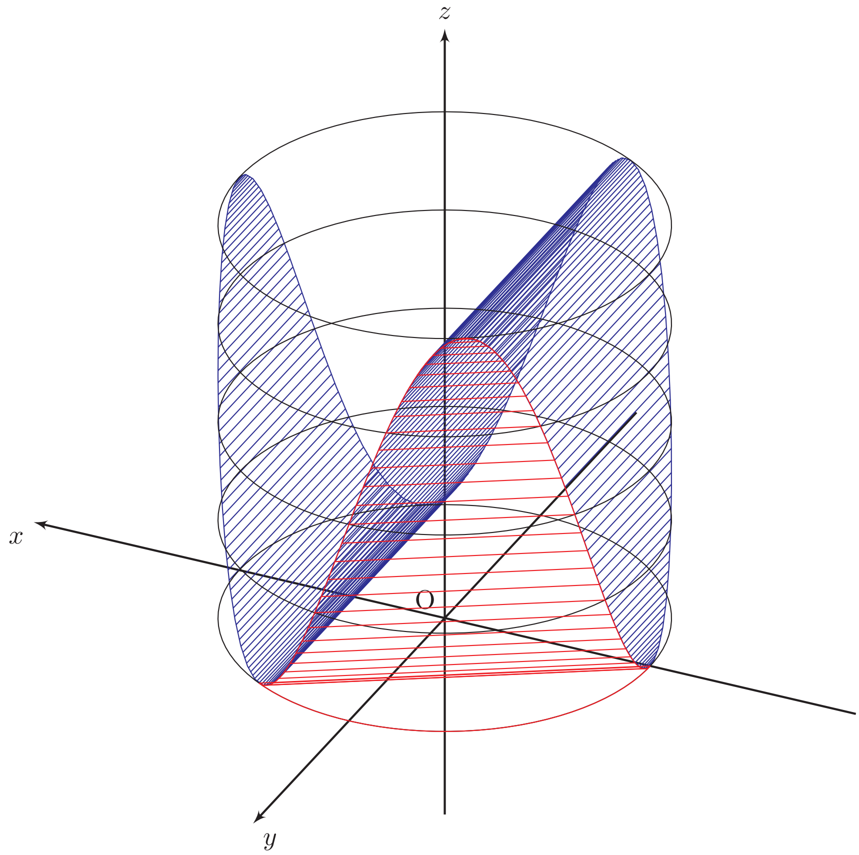
となるので，$\cos\left(\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right)$，$\cos\left(-\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right)$ も $f(x)=u$ の解となる．$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ なので，

$$\cos\theta,\ \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right),\ \cos\left(-\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$$

はすべて異なる値であるから，$\alpha = \cos\left(\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right)$，$\beta = \cos\left(-\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right)$ とわかる．したがって，題意の立体を平面 $z=u$ で切った断面は，T を切った断面と一致する．したがって，求める立体は T と一致するので，その体積は $\boldsymbol{V}$ である．

補足

領域 S は図の青線の作る面の下側である．この面と $x^2+y^2=1$ が交わってできる曲線は，z 軸周り 120° の回転で不変になっている．T を z 軸の周りに 120° の回転させた領域は，図の赤線の作る面の下側であるが，これが S に含まれることは図より見て取れる．



講評

Ⅰ［極方程式，共有点の個数］（標準）

(1) は極方程式の典型問題である．放物線 D については，$r<0$ を許せば結局 1 通りの表し方でよいことに注意したい．(2) の共有点の個数の問題も典型問題で，置き換えた方程式の解が元の方程式の何個の解に対応するのかを注意して数えることになる．

Ⅱ［整数］（標準〜やや難）

難しくはないのだが，注意しないといけないポイントがある．失点を抑えられたかどうかが差のつくところだろう．3 問とも $n+m$ と $n-m$ の偶奇が一致することをうまく使って総数を調べることになるのだが，(2) では $m=0$，(3) では $m=n$ の場合を除外する必要がある．注意したい．

Ⅲ［確率］（やや難）

勝敗がつくまで試行を繰り返していく，確率と数列の融合問題である．引き分けの続く確率が等比数列になっていること，初回以外は勝つ確率と負ける確率が一致することに気がつけば簡単に解けるのだが，状況を把握するのに苦労したかもしれない．

Ⅳ［数学Ⅲの微積分］（難）

空間において，円柱を 3 次関数の定める曲面で切ってできる立体の体積を求める問題である．(1) で 3 倍角の公式を答えさせているのがいかにもヒントになっていそうで，実際に (2) の積分計算でそれを使う局面が現れるのだが，手のつけようがない様に見える (4) のヒントにもなっているということに気づけただろうか．ただ (4) はほとんどの受験生ができないだろうから，合否を分ける問題にはなっていないと思われる．

昨年，一昨年に続き本年度も大問 4 問の出題であった．昨年度は難問ばかりで予想得点も非常に低かったのだが，今年は手のつけられる問題が増えた．それでもⅣの (4) など非常な難問も混ざっている．

Ⅰ，Ⅱ での減点をうまく回避し，Ⅳ の計算を正確に行うことが必要．そのうえで Ⅲ をどこまで解き切ることが出来たかが勝負の分かれ目となるだろう．

目標は 50%．