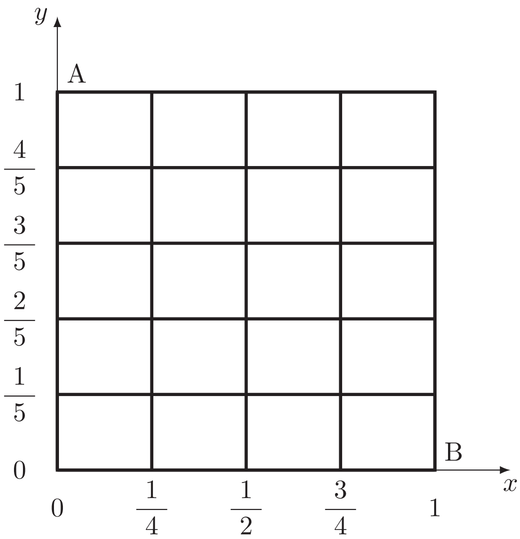
解答速報

関西医科大学（後期）　数学

2025年 3月 1日実施

解説動画公開中!！
https://www.youtube.com/watch?v=zVDc9gigTwk

I　xy 座標平面上に下図の太線で示すような格子状の道路を設定し，この道路のみを通って移動する点を考える。今，ある点が，点 A$(0,\ 1)$ から点 B$(1,\ 0)$ まで最短の道のりで移動する。この点が移動する経路と，x 軸，y 軸によって囲まれた範囲の面積を S とする。囲まれる部分がないときは $S=0$ とする。



以下の設問に答えよ。なお，答えの導出過程は枠内に簡潔に記入し，各設問の答えは指定欄にそれぞれ記入すること。

(1)　A から B へ移動する道順が何通りあるか求めよ。

(2)　A から B へ移動する道順で，S が $\dfrac{2}{5}$ となるものは何通りあるか求めよ。

(3)　A から B へ移動する道順で，S が $\dfrac{3}{4}$ となるものは何通りあるか求めよ。

(4)　A から B へ移動する経路の途中の点の座標を $(x,\ y)$ と表す。(3) で求めた道順をすべて考えた時に，$x+y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

解答

(1)　$\rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$ の並べかえの総数と一対一に対応するので, その総数は $\dfrac{9!}{4!5!}=$ **126 通り**.

(2)　最短の道のりで移動する経路を $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ のように表すことにする．ここで，各 a_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は

$0 \leqq a_i \leqq 5$ をみたす整数であり，各経路において

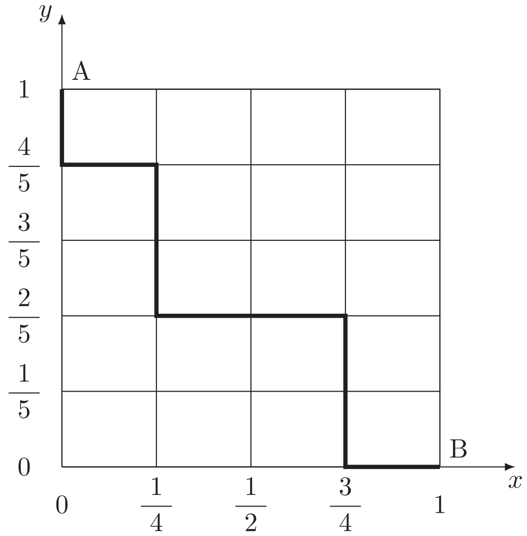
$$\frac{i-1}{4} \leqq x \leqq \frac{i}{4} \text{ における経路の } y \text{ 座標が } \frac{k}{5} \text{ のとき，} a_i = k$$

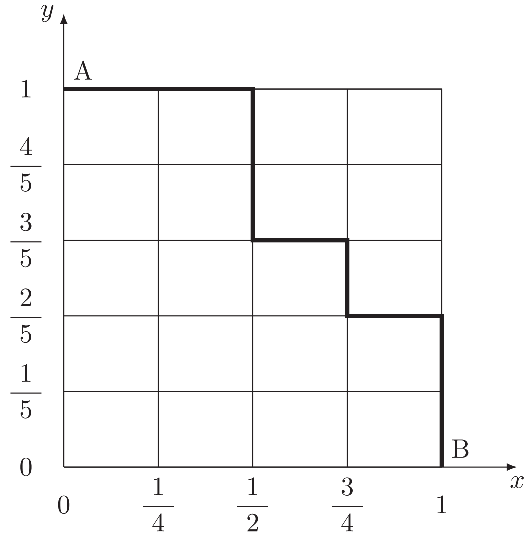
と定めることにする．例えば，

左下図においては $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = (4,\ 2,\ 2,\ 0)$ であり，このとき $S = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$,

右下図においては $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = (5,\ 5,\ 3,\ 2)$ であり，このとき $S = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$

である．





点 A から点 B まで最短の道のりで移動することから $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4$ であることに注意すると，
$S = \dfrac{2}{5}\left(= \dfrac{8}{20}\right)$ となるのは，以下の場合である．

$$\begin{aligned}(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = &(5,\ 3,\ 0,\ 0),\ (5,\ 2,\ 1,\ 0),\ (5,\ 1,\ 1,\ 1),\\ &(4,\ 4,\ 0,\ 0),\ (4,\ 3,\ 1,\ 0),\ (4,\ 2,\ 2,\ 0),\ (4,\ 2,\ 1,\ 1),\\ &(3,\ 3,\ 2,\ 0),\ (3,\ 3,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ 2,\ 1),\\ &(2,\ 2,\ 2,\ 2)\end{aligned}$$

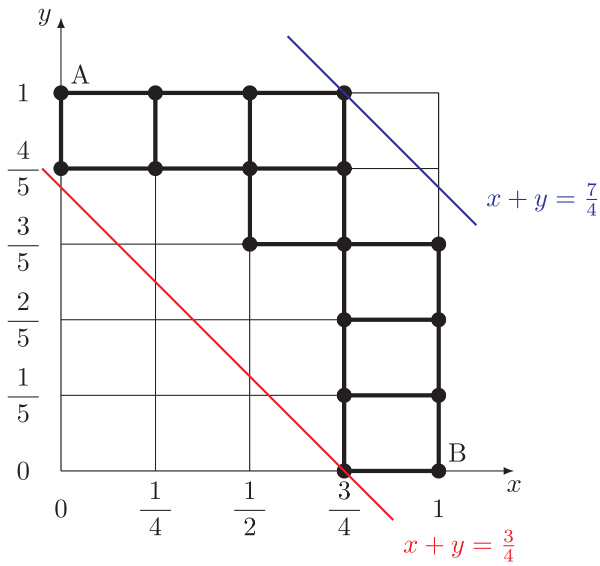
よって，求める総数は **11 通り** である．

(3)　$S = \dfrac{3}{4}\left(= \dfrac{15}{20}\right)$ となるのは，以下の場合である．

$$\begin{aligned}(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = &(5,\ 5,\ 5,\ 0),\ (5,\ 5,\ 4,\ 1),\ (5,\ 5,\ 3,\ 2),\ (5,\ 4,\ 4,\ 2),\ (5,\ 4,\ 3,\ 3),\\ &(4,\ 4,\ 4,\ 3)\end{aligned}$$

よって，求める総数は **6 通り** である．

(4)　(3) で考えた最短の道のりで通過する線分を右図のように太線で表すと，$x+y$ の最大値は $(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{4},\ 1\right)$ のとき $\dfrac{7}{4}$ であり，最小値は $(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)$ のとき $\dfrac{3}{4}$ である．$x+y$ はこの両者の値の間をすべて動くことができるので，求める範囲は $\boldsymbol{\dfrac{3}{4} \leqq x+y \leqq \dfrac{7}{4}}$ である．



II　実数 a を用いて，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^4-6x^2-4ax$ と定める。α, β, γ が互いに異なる実数であるとき，$f(x)$ は $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$ でそれぞれ極値をとる。以下の設問に答えよ。なお，答えの導出過程は枠内に簡潔に記入し，各設問の答えは指定欄にそれぞれ記入すること。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ を a を用いて表せ。

(3)　$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$ を a を用いて表せ。

(4)　$(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

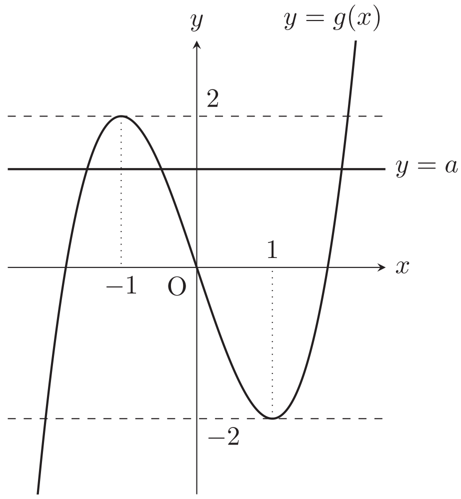
$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$f(x)=x^4-6x^2-4ax$ より $f'(x)=4x^3-12x-4a$ である．$f(x)$ が $x=\alpha$, β, γ で極値をとるためには，$f'(x)=0$ が異なる 3 つの解をもち，その前後で $f'(x)$ の符号が変化することが必要十分である．

$$f'(x)=0 \iff 4x^3-12x-4a=0 \iff a=x^3-3x$$

であるので，$y=x^3-3x$ と $y=a$ が異なる 3 つの交点をもてばよい（このときその交点の前後で符号が変化することも同時に言えている）．$g(x)=x^3-3x$ とすると，$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ であるので増減表とグラフは次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



したがって，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{-2<a<2}$ である．

(2)　$f'(x)=0$ の解が $x=\alpha$, β, γ であることから

$$f'(x)=4x^3-12x-4a=4(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

を得る．$h(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-3x-a$ とおくと，

$$h(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=\boldsymbol{-2-a}$$

(3)

$$h(-1)=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)=2-a$$
$$\iff (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=\boldsymbol{-2+a}$$

(4)

$$\begin{aligned}(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)&=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\\&=(-2-a)(-2+a)\\&=-a^2+4\end{aligned}$$

であるので，(1) で求めた $-2<a<2$ の範囲では，$0<-a^2+4\leqq 4$.

つまり，$\boldsymbol{0<(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)\leqq 4}$ である．

III　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=1,\ a_2=2,\ na_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}+(n+2)a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と定める。また，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と定める。以下の設問に答えよ。

(1)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答

(1)　与えられた漸化式から

$$\begin{aligned}&n(a_{n+2}-a_{n+1})=(n+2)(a_{n+1}-a_n)\\ \iff\ &nb_{n+1}=(n+2)b_n\\ \iff\ &\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{n+2}{n}b_n}\end{aligned}$$

(2)　(1) の結果の等式の両辺を $(n+2)(n+1)$ で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{(n+2)(n+1)}=\frac{b_n}{(n+1)n}$$

が得られる．したがって数列 $\left\{\dfrac{b_n}{(n+1)n}\right\}$ は定数列であり，$\dfrac{b_1}{2\cdot 1}=\dfrac{a_2-a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\frac{b_n}{(n+1)n}=\frac{1}{2}\iff \boldsymbol{b_n=\frac{1}{2}n(n+1)}$$

(3)　(2) の結果から，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k+1)\\ &=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)\\ &=1+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)\right\}\\ &=\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{6}n+1\end{aligned}$$

となる．これは $n=1$ のときも成り立つので，$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{6}n+1}$ である．

解説動画公開中!！
https://www.youtube.com/watch?v=2BOpX_jE67Q

Ⅳ　θ を $0<\theta<\pi$ の範囲を動く媒介変数とする。原点を O とする xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，点 $\mathrm{B}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$，点 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点を N とし，N の軌跡を C とする。このとき，以下の設問に答えよ。

(1)　OA // DN であることを示せ。

(2)　DN の長さを θ を用いて表せ。

(3)　C の概形を描け。

(4)　直線 AB は C に接することを示せ。

解答

(1)　ベクトルの成分で考える.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DN}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} \\
&= \frac{1}{3}(2\cos\theta + \cos 2\theta + 1,\ 2\sin\theta + \sin 2\theta) \\
&= \frac{1}{3}(2\cos\theta + 2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta) \\
&= \frac{2}{3}(1+\cos\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta) \\
&= \frac{2}{3}(1+\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}
\end{aligned}
$$

したがって OA // DN である.　（証明終）

(2)　(1) より $\mathrm{DN} = |\overrightarrow{\mathrm{DN}}| = \left|\dfrac{2}{3}(1+\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}(1+\cos\theta)}$ である.

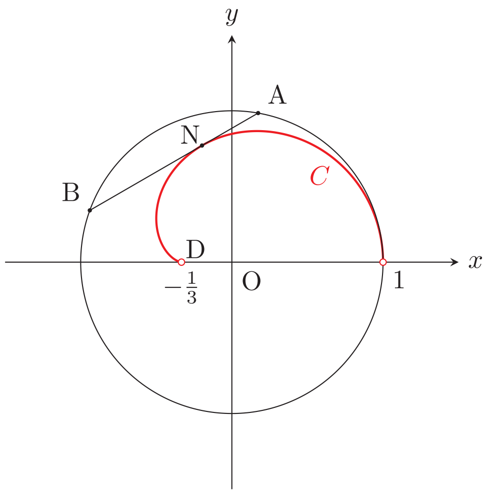
(3)　$\mathrm{N}(x,\ y)$ は $x = \dfrac{1}{3}(2\cos\theta + \cos 2\theta)$，$y = \dfrac{1}{3}(2\sin\theta + \sin 2\theta)$ と媒介変数表示される．これより

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= \frac{1}{3}(-2\sin\theta - 2\sin 2\theta) = -\frac{4}{3}\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta \\
\frac{dy}{d\theta} &= \frac{1}{3}(2\cos\theta + 2\cos 2\theta) = \frac{4}{3}\cos\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta
\end{aligned}
$$

がわかり，増減表は次のようになる.

θ	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\swarrow$	$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\searrow$	$\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

これよりグラフを描くと次の赤線のようになる.（(1), (2) の結果からもわかるが，この曲線はカージオイドと呼ばれる，極方程式の問題として頻出のものである.）



(4)　(3) より点 N における接線の方向ベクトルについて

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=\left(-\frac{4}{3}\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta,\ \frac{4}{3}\cos\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta\right)\ //\ \left(-\sin\frac{3}{2}\theta,\ \cos\frac{3}{2}\theta\right)$$

である．一方直線 AB の方向ベクトルについて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos 2\theta-\cos\theta,\ \sin 2\theta-\sin\theta)=\left(-2\sin\frac{3}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta,\ 2\cos\frac{3}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta\right)\ //\ \left(-\sin\frac{3}{2}\theta,\ \cos\frac{3}{2}\theta\right)$$

であり，双方のベクトルが平行になっていることがわかる．以上により証明された．　（証明終）

的中!!

2025 年 2 月 28 日実施 関西医科大学後期攻略講座 数学（入試日の前日！）

極座標で $r=\cos 2\theta\ (-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4})$ と表される曲線 C を考える．

(1)　θ に対応する C 上の点の直交座標 x，y を，θ を媒介変数として表せ．

(2)　$-\frac{\pi}{4}<\theta<0$ または $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲の θ に対応する点における C の接線の傾きを $T(\theta)$ として，$\displaystyle\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{4}+0}T(\theta)$ と $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}T(\theta)$ を求めよ．

(3)　曲線 C の概形を描け．

(4)　曲線 C が囲む図形の面積を求めよ．

媒介変数で表された曲線の概形や接線の傾きについて，前日の授業で扱いました！

講評

Ⅰ［場合の数，図形と方程式］（標準）

最短経路について考える問題であった．丁寧に数え上げていけばよいが，慎重さを要する．(3) の経路が把握できれば，(4) は易しい．

Ⅱ［数学Ⅱの微積分，数と式］（やや易）

(1) は $f'(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ条件を求める典型問題であり落とせない．それ以降は，$f'(x)=0$ が α，β，γ を解にもつことに着目して $f'(x)$ の因数分解を利用すれば，計算はほとんど必要ない．この大問は完答を目指したい．

Ⅲ［数列］（標準）

隣接 3 項間漸化式の問題であった．与えられた漸化式が見慣れない形なので戸惑った受験生も多いかも知れないが，冷静に対処して乗り切りたい．(1) が突破できればその後は標準的であり，(1) の出来が得点を大きく左右しそうである．

Ⅳ［数学Ⅲの微積分，いろいろな曲線］（やや難）

媒介変数表示された曲線について考える問題．三角関数の扱いに慣れているかどうかが得点に影響しそうである．

2024 年度後期と比べると，形式上の変化はない．難易度はやや下がっているが，得点に大きく差がつきそうな問題が多い．大問 Ⅰ～Ⅲ を完答に近いところまで仕上げ，大問 Ⅳ でどこまで立ち回れたか，という勝負であろう．

目標は 75%．