解答速報

川崎医科大学　数学

2025年 1月 26日実施

$\boxed{1}$　座標平面上に 2 つの直線 $\ell : y = 2x + 4$, $m : y = -2x + 12$ がある。2 直線 ℓ, m の交点を A とし，直線 m と x 軸の交点を B とする。線分 AB を直径とする円を K とし，直線 ℓ と円 K の共有点で A でない方を C とする。また，D $(2,\ 0)$ とする。

(1)　点 A の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，円 K の中心の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$，半径は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，点 C の座標は $\left(-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ である。

(2)　$\angle\mathrm{ADC} = \alpha$, $\angle\mathrm{BCD} = \beta$ とするとき，$\tan\alpha = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$ である。

(3)　a を定数とし，円 K の点 D を含む弧 BC と線分 AB および線分 AC で囲まれた領域を L とする。点 $(x,\ y)$ が領域 L を動くとき，$ax - y$ の最大値 M は，

$a < -\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき，$M = \dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\left(a + \boxed{\text{ネ}}\right)$

$-\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}} \leqq a < \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ のとき，

$$M = \boxed{\text{ヒ}}a - \boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}\left(a^2 + \boxed{\text{マ}}\right)}$$

$\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \leqq a$ のとき，$M = \boxed{\text{ミ}}a$

である。

また，a の値が変化するとき，M が最小値をとるのは，$a = \boxed{\text{ムメ}}$ のときである。

解答

解答記号	正解
(ア，イ)	(2，8)
(ウ，エ)	(4，4)
オ$\sqrt{\text{カ}}$	$2\sqrt{5}$
$\left(-\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}},\ \dfrac{\text{ケコ}}{\text{サ}}\right)$	$\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$
$\dfrac{\text{シ}}{\text{ス}}$	$\dfrac{3}{4}$
$\dfrac{\text{セ}\sqrt{\text{ソ}}}{\text{タチ}}$	$\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$

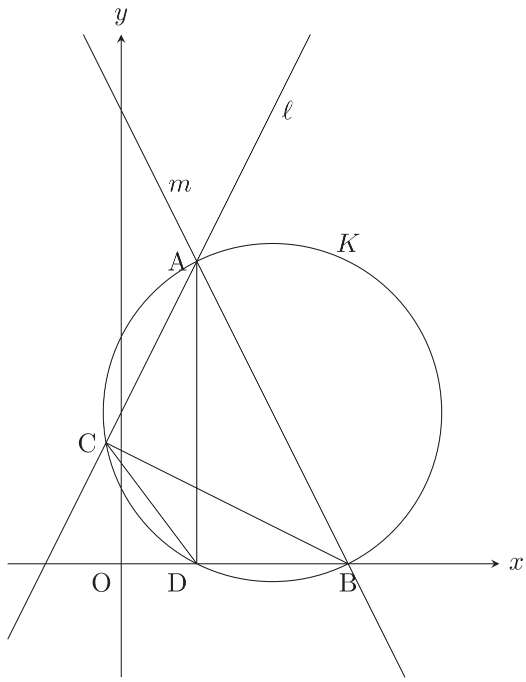
解答記号	正解
$\dfrac{\text{ツテ}}{\text{ト}}$	$\dfrac{11}{2}$
$\dfrac{\text{ナニ}}{\text{ヌ}}(a+\text{ネ})$	$\dfrac{-2}{5}(a+8)$
$\dfrac{\text{ノ}}{\text{ハ}}$	$\dfrac{1}{2}$
ヒ $a-$ フ $+$ ヘ$\sqrt{\text{ホ}\,(a^2+\text{マ})}$	$4a-4+2\sqrt{5(a^2+1)}$
ミ	6
ムメ	-2

解説

(1)　ℓ，m を連立することにより，A の座標は $(\mathbf{2},\ \mathbf{8})$ とわかる．また，B(6, 0) であるから，円 K の中心は線分 AB の中点なので $(\mathbf{4},\ \mathbf{4})$，また半径は $\dfrac{\text{AB}}{2}=\mathbf{2\sqrt{5}}$ である．したがって，円 K の方程式は

$$(x-4)^2+(y-4)^2=20$$

であり，これと ℓ を連立することで，$\text{C}\left(-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}}\right)$ となる．



(2)　円周角の定理より，$\angle\text{ADC}=\angle\text{ABC}=\alpha$，$\angle\text{BCD}=\angle\text{BAD}=\beta$ である．

$\triangle$ABC は $\angle\text{ACB}=90^\circ$ の直角三角形であり，$\text{AB}=4\sqrt{5}$，$\text{BC}=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$，$\text{CA}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ であるから，

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5},\ \tan\alpha=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

である．

また，$\triangle$ABD は $\angle\text{ADB}=90^\circ$ の直角三角形であり，$\text{AB}=4\sqrt{5}$，$\text{BD}=4$，$\text{DA}=8$ であるから，

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\\&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{25}}\end{aligned}$$

(3)　$ax-y=k$ とおくと，領域 L と直線 $\ell: y=ax-k$ が共有点をもつときに k の値が存在することになる．

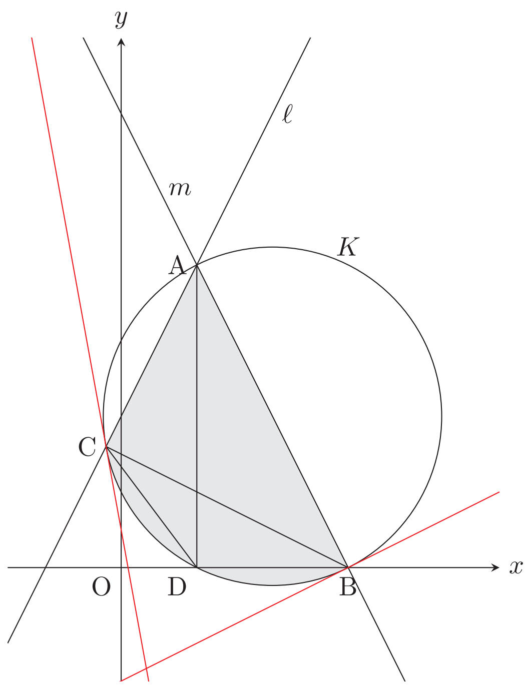
円 K の中心を $\mathrm{K}(4,\ 4)$ とすると，直線 KC の傾きが $\dfrac{\frac{16}{5}-4}{-\frac{2}{5}-4}=\dfrac{2}{11}$ であることから，

$$点\ \mathrm{C}\ における円\ K\ の接線の傾きは\ -\frac{11}{2}$$

同様にして，直線 KB の傾きが -2 であることから，

$$点\ \mathrm{B}\ における円\ K\ の接線の傾きは\ \frac{1}{2}$$

「直線 ℓ の y 切片 $-k$ が最小であるときに k が最大となる」ことに注意すると，k の最大値 M は次のような場合分けによって求められる．



(i)　$a<\boldsymbol{-\dfrac{11}{2}}$ のとき

直線 ℓ が点 $\mathrm{C}\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$ を通るときに k は最大となるので，

$$M=-\frac{2}{5}a-\frac{16}{5}=\boldsymbol{\frac{-2}{5}(a+8)}$$

(ii)　$-\dfrac{11}{2}\leqq a<\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ のとき

直線 ℓ が円 K の $y<4$ の部分と接するときに k は最大となる．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{|4a-4-k|}{\sqrt{a^2+1}}=2\sqrt{5}&\iff |k-4a+4|=2\sqrt{5(a^2+1)}\\&\iff k-(4a-4)=\pm2\sqrt{5(a^2+1)}\\&\iff k=4a-4\pm2\sqrt{5(a^2+1)}\end{aligned}$$

であるから，

$$M=\boldsymbol{4a-4+2\sqrt{5(a^2+1)}}$$

(iii)　$\dfrac{1}{2}\leqq a$ のとき

直線 ℓ が点 $\mathrm{B}(6,\ 0)$ を通るときに k は最大となるので，

$$M=\boldsymbol{6a}$$

次に，M が最小値をとるときの a の値について考える．$-M$ の値は，$ax-y$ が最大値をとるときの直線 $y=ax-k$ の y 切片である．傾き a の変化に対する y 切片 $-M$ の動きを考える事により，M が最小つまり $-M$ が最大となるのは，直線 $y=ax-k$ が点 $(0,\ 2)$ で円に接するときだとわかる．$(0,\ 2)$ と円の中心 $(4,\ 4)$ とを結ぶ直線の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるから，これより $a=\mathbf{-2}$ である．

$\boxed{\text{注釈}}$

(i) ～ (iii) の結果から，a の変化に対する M の増減を調べてもよい．

$$\frac{dM}{da}=\begin{cases} -\dfrac{2}{5} & \left(a<-\dfrac{11}{2}\ \text{のとき}\right) \\ \dfrac{4\sqrt{a^2+1}+2\sqrt{5}a}{\sqrt{a^2+1}} & \left(-\dfrac{11}{2}<a<\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\right) \\ 6 & \left(\dfrac{1}{2}<a\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

が得られるので，M の増減表は次のようになる．

a		$-\frac{11}{2}$		-2		$\frac{1}{2}$	
$\frac{dM}{da}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
M	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

よって，M が最小値をとるのは $a=\mathbf{-2}$ のときである．

$\boxed{2}$ a は $0 < a \leqq 1$ を満たす定数とし，関数 $f(x) = \log(x + a)$ がある。

(1) $a = 1$ とする。 $y = f(x)$ のグラフを C_1 とし，C_1 上の点 $(1,\ f(1))$ における法線を ℓ とする。

(i) $f'(1) = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，法線 ℓ の方程式は，$y = \boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オ}} + \log \boxed{\text{カ}}$ である。また，C_1 と ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積は，$\boxed{\text{キ}} - \log \boxed{\text{ク}}$ である。

(ii) $p,\ q$ を定数とし，q は $\log 2 < q < \boxed{\text{オ}} + \log \boxed{\text{カ}}$ を満たすとする。$y = p\log(x+1) + q$ のグラフを C_2 とし，C_2 が点 $(1,\ \log 2)$ を通るとき，$q = \left(\boxed{\text{ケ}} - p\right)\log \boxed{\text{コ}}$ である。このとき，$x \geqq 0$ の部分で C_2 と ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積が $\dfrac{\log 2 + 1}{2}$ であれば，$p = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(2) $g(a) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ とする。

$g(a) = \left(a + \boxed{\text{セ}}\right)\log\left(a + \boxed{\text{ソ}}\right) + a\log a - \boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}$ である。また，$g'(a) = 0$ の解は，

$a = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であり，a の値が変化するとき，$g(a)$ の最小値は，

$$\log \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} + \boxed{\text{ネ}} - \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\dfrac{1}{2}$
ウエ $x+$ オ $+\log$ カ	$-2x+2+\log 2$
キ $-\log$ ク	$2-\log 2$
(ケ $-p)\log$ コ	$(1-p)\log 2$
$\dfrac{\text{サシ}}{\text{ス}}$	$\dfrac{-1}{2}$
$(a+$ セ$)\log(a+$ ソ$)+a\log a-$ タ $a+$ チ	$(a+1)\log(a+1)+a\log a-2a+1$
$\dfrac{\sqrt{\text{ツ}}-\text{テ}}{\text{ト}}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
$\log\dfrac{\sqrt{\text{ナ}}+\text{ニ}}{\text{ヌ}}+\text{ネ}-\sqrt{\text{ノ}}$	$\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5}$

解説

(1) (i)　$f(x)=\log(x+1)$ より，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$．よって $f'(1)=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$ である．

よって ℓ は $(1,\ \log 2)$ を通り，傾き -2 の直線であるので，その方程式は

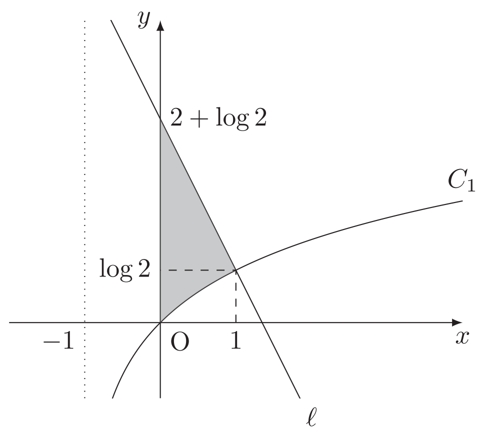
$$y=-2(x-1)+\log 2 \iff y=\mathbf{-2}x+\mathbf{2}+\log\mathbf{2}$$

また C_1 と ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，ℓ と x 軸，y 軸および $x=1$ で囲まれた台形の面積を T とすると，

$$T=\frac{1}{2}\{\log 2+(2+\log 2)\}=1+\log 2$$

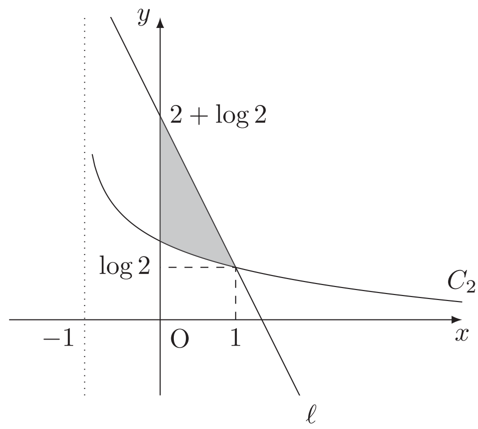
したがって

$$\begin{aligned} S_1&=T-\int_0^1\log(x+1)dx\\ &=(1+\log 2)-\Big[(x+1)\log(x+1)-x\Big]_0^1\\ &=(1+\log 2)-(2\log 2-1)=\mathbf{2}-\log\mathbf{2} \end{aligned}$$



(ii)　C_2 が $(1,\ \log 2)$ を通るので，

$$\log 2 = p\log 2 + q \iff q = (\mathbf{1} - p)\log \mathbf{2}$$



また，$x \geqq 0$ の部分で C_2 と ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とすると，

$$S_2 = T - \int_0^1 \{p\log(x+1) + q\}dx$$

であり，$S_2 = \dfrac{\log 2 + 1}{2}$ であることから，

$$\begin{aligned}
&\frac{\log 2 + 1}{2} = (1 + \log 2) - \int_0^1 \{p\log(x+1) + q\}dx \\
&\iff \int_0^1 \{p\log(x+1) + q\}dx = \frac{\log 2 + 1}{2} \\
&\iff p\Big[(x+1)\log(x+1) - x\Big]_0^1 + q = \frac{\log 2 + 1}{2} \\
&\iff p(2\log 2 - 1) + (1-p)\log 2 = \frac{\log 2 + 1}{2} \\
&\iff (\log 2 - 1)p = \frac{-\log 2 + 1}{2}
\end{aligned}$$

したがって，$p = \dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$ である．

(2)　$0 \leqq x \leqq 1 - a$ において $f(x) \leqq 0$，$1 - a \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \geqq 0$ であるので，

$$\begin{aligned}
g(a) &= \int_0^1 |f(x)|dx \\
&= \int_0^{1-a} \{-\log(x+a)\}dx + \int_{1-a}^1 \log(x+a)dx \\
&= -\Big[(x+a)\log(x+a) - x\Big]_0^{1-a} + \Big[(x+a)\log(x+a) - x\Big]_{1-a}^1 \\
&= (a+\mathbf{1})\log(a+\mathbf{1}) + a\log a - \mathbf{2}a + \mathbf{1}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$g'(a) = 1\cdot\log(a+1) + (a+1)\cdot\frac{1}{a+1} + 1\cdot\log a + a\cdot\frac{1}{a} - 2 = \log a + \log(a+1)$$

となるので，

$$g'(a) = 0 \iff \log\{a(a+1)\} = 0 \iff \log\{a(a+1)\} = \log 1$$

真数を比較して

$$a(a+1) = 1 \iff a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$0 \leqq a \leqq 1$ より $a = \dfrac{\sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ である．

a	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		$\searrow$	$g\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	$\nearrow$	

増減表より $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のときに $g(a)$ は最小となり，

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}-(\sqrt{5}-1)+1 \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5} \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot 0+\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5} \\
&= \log\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+\boldsymbol{2}-\boldsymbol{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ i を虚数単位とし，2 つの複素数 $\alpha = 2+4i$，$\beta = 1-3i$ がある。

(1) $|\alpha| = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，$\dfrac{\alpha}{\beta} = \boxed{\text{ウエ}} + i$ であり，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと，

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\boxed{\text{オ}}}\left(\cos\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi + i\sin\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)$ となる。ただし，$0 \leqq \arg\dfrac{\alpha}{\beta} < 2\pi$ とする。また，

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{20} = \boxed{\text{クケコサシ}}$ である。

(2) 複素数 z は，方程式 $|z-\beta| = \sqrt{2}$ を満たしている。このとき，$|z-\alpha|$ の最大値は $\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ であり，

そのときの z は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タチ}}\,i}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(3) 複素数平面上で，複素数 α，β が表す点をそれぞれ A，B とする。$\gamma = \dfrac{\boxed{\text{テ}} - i}{\boxed{\text{トナ}}}$ とするとき，直線 AB 上の点を表す複素数 z は，つねに方程式 $\overline{\gamma}z + \gamma\overline{z} = 1$ を満たす。このとき，$zw = 10$ を満たす複素数 w が表す点は，点 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}} + i}{\boxed{\text{ヌ}}}$ を中心とし，半径が $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ の円周上にある。また，複素数 z，w が表す点をそれぞれ P，Q とし，P，Q は実軸上にないとする。△POQ の面積が最大となるとき，直線 AB は △POQ の面積を $\boxed{\text{ヒ}} : \boxed{\text{フ}}$ の比に分ける。ただし，O は原点とし，$\boxed{\text{ヒ}} < \boxed{\text{フ}}$ とする。

解答

解答記号	正解
ア$\sqrt{\text{イ}}$	$2\sqrt{5}$
ウエ	-1
$\sqrt{\text{オ}}$, $\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$	$\sqrt{2}$, $\dfrac{3}{4}$
クケコサシ	-1024
ス$\sqrt{\text{セ}}$	$6\sqrt{2}$
$\dfrac{\text{ソ}-\text{タチ}\,i}{\text{ツ}}$	$\dfrac{4-22i}{5}$

解答記号	正解
$\dfrac{\text{テ}-i}{\text{トナ}}$	$\dfrac{7-i}{20}$
$\dfrac{\text{ニ}+i}{\text{ヌ}}$	$\dfrac{7+i}{2}$
$\dfrac{\text{ネ}\sqrt{\text{ノ}}}{\text{ハ}}$	$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
ヒ : フ	5 : 7

解説

(1)

$$|\alpha| = \sqrt{2^2+4^2} = \mathbf{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2+4i}{1-3i} = \frac{(2+4i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-10+10i}{10} = \mathbf{-1}+i$$

この結果から，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で次のように表すことができる.

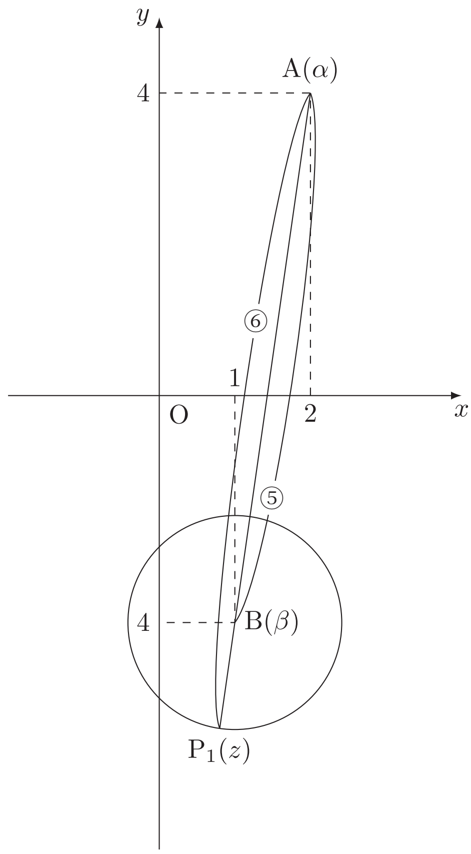
$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\mathbf{2}}\left(\cos\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

したがって，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{20} = (\sqrt{2})^{20}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\times 20\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\times 20\right)\right\} = 2^{10}(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = \mathbf{-1024}$$

(2) 複素数 $\alpha,\ \beta,\ z$ が表す点をそれぞれ A, B, P とすると，$|z-\beta|=\sqrt{2}$ を満たす点 P の軌跡は「中心が点 B で，半径が $\sqrt{2}$ である円」になる．この円と直線 AB との 2 交点のうち，点 A から遠い方になる点を $\mathrm{P_1}$ とすると，$|z-\alpha|$ の値は線分 AP の長さとなることから，$|z-\alpha|$ の最大値は $\mathrm{AP_1}=\mathrm{AB}+\mathrm{BP_1}=5\sqrt{2}+\sqrt{2}=\mathbf{6\sqrt{2}}$ となる．このとき，$\mathrm{AB}:\mathrm{AP}=5:6$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が成り立つので，

$$z=\alpha+\frac{6}{5}(\beta-\alpha)=2+4i+\frac{6}{5}(-1-7i)=\mathbf{\frac{4-22i}{5}}$$



(3) $\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z}=1\ \cdots$① を満たす γ について

直線 AB は $y=7x-10$ である．ここで $z=x+yi,\ \overline{z}=x-yi$ より，$x=\dfrac{z+\overline{z}}{2},\ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ である．これを $y=7x-10$ に代入し整理すると，

$$\frac{7+i}{20}z+\frac{7-i}{20}\overline{z}=1$$

となるので，$\gamma=\mathbf{\dfrac{7-i}{20}}$.

別解

直線 AB 上の点を表す複素数 z において，3 点 $\alpha,\ \beta,\ z$ に関する共線条件により，次の関係式が成立する．

$$\begin{aligned}
\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)} &\iff \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\\
&\iff (z-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})=(\overline{z}-\overline{\alpha})(\beta-\alpha)\\
&\iff (\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-\alpha\overline{\beta}+|\alpha|^2=(\beta-\alpha)\overline{z}-\overline{\alpha}\beta+|\alpha|^2\\
&\iff (\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\alpha-\beta)\overline{z}=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta\\
&\iff (-1+7i)z+(1+7i)\overline{z}=20i\\
&\iff \left(\frac{7+i}{20}\right)z+\left(\frac{7-i}{20}\right)\overline{z}=1
\end{aligned}$$

この結果から，① を満たす γ は $\gamma=\mathbf{\dfrac{7-i}{20}}$ である．

$zw=10\ \cdots$② を満たす複素数 w について

$w \neq 0$ であるから，② より $z=\dfrac{10}{w}$ としてよい．これを ① に代入して z を消去することで，

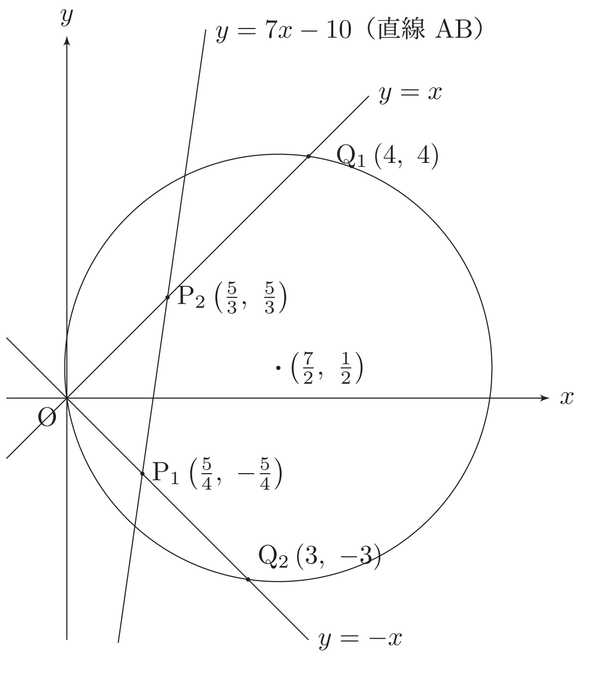
$$\begin{aligned}
\frac{10\overline{\gamma}}{w}+\frac{10\gamma}{\overline{w}}=1 &\iff 10\overline{\gamma w}+10\gamma w=w\overline{w}\\
&\iff w\overline{w}-10\gamma w-10\overline{\gamma w}=0\\
&\iff (w-10\overline{\gamma})(\overline{w}-10\gamma)=100|\gamma|^2\\
&\iff |w-10\overline{\gamma}|^2=(10|\gamma|)^2\\
&\iff |w-10\overline{\gamma}|=10|\gamma|\\
&\iff \left|w-\frac{7+i}{2}\right|=\frac{5\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

この結果から，複素数 w が表す点は「点 $\boldsymbol{\dfrac{7+i}{2}}$ を中心とし，半径が $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{2}}$ の円周上」にあることが分かる．ただし原点を除く．

以下では xy 座標平面で考える．$\triangle$OPQ の面積については，

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}|z||w|\sin\angle\mathrm{POQ}=\frac{1}{2}|zw|\sin\angle\mathrm{POQ}=5\sin\angle\mathrm{POQ}$$

と表されるので，$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}$ のときに最大となる．② から，$\arg(z)=-\arg(w)$ であることが分かるので，$(\arg z,\ \arg w)=\left(\dfrac{\pi}{4},\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である．点 P は直線 AB : $y=7x-10$ 上を，点 Q は原点を除いた円周 $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$ 上を動くことから，点 P，Q はそれぞれ，図の $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{Q_1}$ または $\mathrm{P_2}$，$\mathrm{Q_2}$ となる．点 P，Q がそれぞれ $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{Q_1}$ であるときは，$\triangle\mathrm{P_1OQ_1}$ が $\mathrm{P_1P_2}$ で分けられると考えて，その面積比は $\mathrm{OP_2}:\mathrm{P_2Q_1}=\dfrac{5}{3}:\left(4-\dfrac{5}{3}\right)=\mathbf{5:7}$．点 P，Q がそれぞれ $\mathrm{P_2}$，$\mathrm{Q_2}$ であるときも同様に考えて面積比は $\mathrm{OP_1}:\mathrm{P_1Q_2}=\dfrac{5}{4}:\left(3-\dfrac{5}{4}\right)=\mathbf{5:7}$.



講評

$\boxed{1}$［図形と方程式，三角関数］（やや易〜やや難）

(1) は落とせない．(2) は円周角の定理を利用して三角比が簡単に求まる三角形に言い換えたい．(3) は定番の「領域と最大最小」だが，文字定数 a を含むので難しかったかもしれない．よくわからなくても，領域の端点をいくつか代入して解答枠にうまく当てはまるものを見つけることはできる．最後の設問は難度が高かった．

$\boxed{2}$［数学 III の微積分］（標準）

ごく標準的な微分の問題．C_2 と法線の様子を把握するのにやや手こずったかもしれないが，それ以外は特に行き詰まる点もなく完答したい問題であった．ただし，計算が若干煩雑であったので，要領よく計算できたかどうかで所要時間に大きく差がついただろう．

$\boxed{3}$［複素数平面］（やや難）

前半はごく標準的な問題で落とせない．後半は反転変換と呼ばれる軌跡の類題であるが，直線の方程式や三角形の面積最大化といった，あまり見慣れない問題設定だったので戸惑った受験生も多かっただろう．直線の方程式に含まれた γ の求め方は何通りか考えられるが，本解のように直線 AB を x, y の式として表し，x, y を z, $\overline{z}$ で書き直すのが手っ取り早い．最後の面積比は分かってしまえば単純な設定だったが，最後までたどり着けた受験生は少なかったと思われる．

昨年度より難化している．各大問とも得点しにくい設問が含まれており，高得点は難しい．$\boxed{2}$をなるべく完答に近いところまで仕上げて，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$それぞれの前半をできる限りとりたい．目標は 60%．