近畿大学医学部（前期）　数学

2025年 1月 26日実施

I　関数

$$f(x)=\log_5(1-\cos 2x-3\cos x)$$

を考える。ただし，x の値は $0 \leqq x < 2\pi$ において，$f(x)$ が定義されるもののみを考える。

(1)　$t=\cos x$ とおく。$f(x)$ を t を用いて表すと

$$\log_5\left(\boxed{\text{アイ}}t^2-\boxed{\text{ウ}}t+\boxed{\text{エ}}\right)$$

である。

(2)　$f(x)$ が定義される x のとりうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < x < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である。

(3)　$f(x)$ の最大値は

$$\boxed{\text{ケ}}-\log_5\boxed{\text{コ}}$$

である。また，$f(x)$ が最大となるとき，$\cos x$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(4)　$5^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。また，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総数は $\boxed{\text{ソ}}$ であり，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\boxed{\text{タ}}\pi$ である。

(5)　$20^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は $\boxed{\text{チ}}$ である。また，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総数は $\boxed{\text{ツテ}}$ であり，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\boxed{\text{トナ}}\pi$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

解答

解答記号	正解
アイ t^2 − ウ t + エ	$-2t^2-3t+2$
$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}\pi < x < \dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}\pi$	$\dfrac{1}{3}\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi$
ケ $-\log_5$ コ	$2-\log_5 8$
$\dfrac{\text{サシ}}{\text{ス}}$	$\dfrac{-3}{4}$
セ	3
ソ	7
タπ	7π
チ	8
ツテ	18
トナπ	18π

解説

(1)　$f(x) = \log_5(1 - \cos 2x - 3\cos x)$ において，$t = \cos x$ とおくと，

$$f(x) = \log_5(1 - 2\cos^2 x + 1 - 3\cos x)$$
$$= \mathbf{\log_5(-2t^2 - 3t + 2)}$$

である．

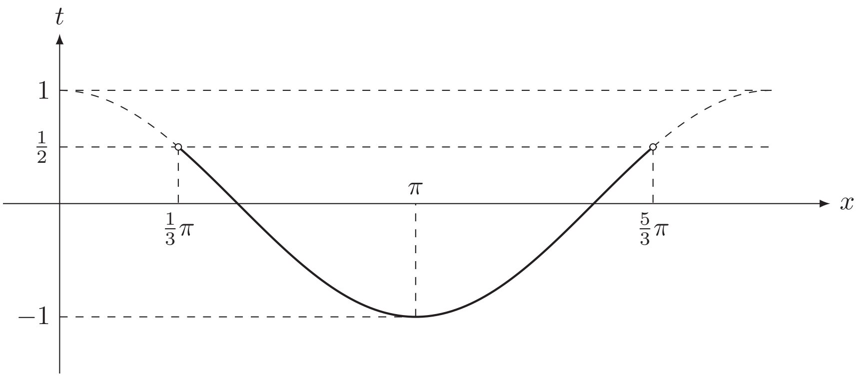
(2)　真数条件より $-2t^2 - 3t + 2 > 0 \iff -2 < t < \frac{1}{2} \iff -2 < \cos x < \frac{1}{2}$ であることから，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲でこれを解いて $\mathbf{\frac{1}{3}}\pi < x < \mathbf{\frac{5}{3}}\pi$ である．（$\cos x \geqq -1$ であるから，t の取り得る値の範囲は $-1 \leqq t < \frac{1}{2}$ であることに注意しておく．）

(3)　対数関数の底は 5 であり，これは 1 より大きいので，真数 $-2t^2 - 3t + 2$ が最大となるとき $f(x)$ も最大となる．ここで，

$$-2t^2 - 3t + 2 = -2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$$

であるから，$-1 \leqq t < \frac{1}{2}$ の範囲における $-2t^2 - 3t + 2$ の最大値は $\frac{25}{8}$ である．したがって求める最大値は $\log_5 \frac{25}{8} = \mathbf{2 - \log_5 8}$ である．また，$-2t^2 - 3t + 2$ が最大となるとき，$t = -\frac{3}{4}$ であるから，$\cos x = \mathbf{-\frac{3}{4}}$ である．

(4)　まず，$t = \cos x$ のグラフを $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$ の範囲でかくと，下図のようになる．

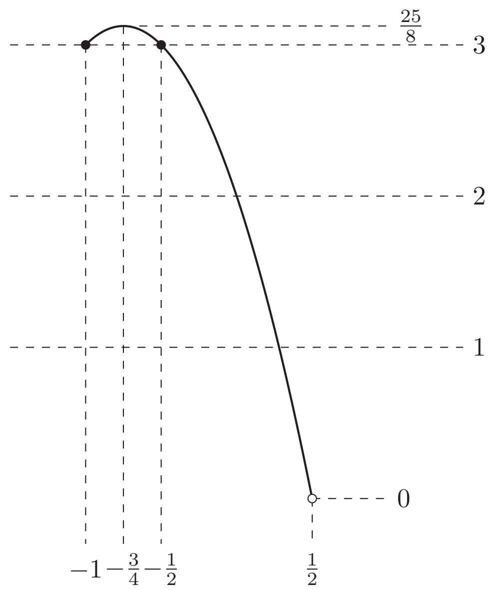


したがって，t と x の対応は以下の通りである．

t の値	対応する x の値の個数
-1	1
$-1 < t < \frac{1}{2}$	2
$t < -1,\ t \geqq \frac{1}{2}$	0

$$
\begin{aligned}
5^{f(x)} &= 5^{\log_5(-2t^2-3t+2)} \\
&= -2t^2-3t+2 \;(= g(t) \text{ とおく})
\end{aligned}
$$

であり，$y = g(t)$ の $-1 \leqq t < \dfrac{1}{2}$ の範囲におけるグラフは右図のようになる．したがって $5^{f(x)}$ がとり得る最大の整数は **3** である．また，$5^{f(x)}$ が整数となるとき，とりうる整数値は右のグラフより 1，2，3 の 3 つであることがわかる．



このときそれぞれの整数値に対応する t の値，x の個数は次の通りである．

$5^{f(x)}$ の整数値	t の値	x の個数
3	$-1,\ -\dfrac{1}{2}$	3
2	$-\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{1}{2}$	2
1	$-\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{1}{2}$	2

したがって，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総数は **7** である．このとき t の値は 4 つあり，ひとつは $t = -1$ であり，それ以外の 3 つの t はいずれも $-1 < t < \dfrac{1}{2}$ の範囲にある．$t = -1$ に対応する x の値は $x = \pi$ のみであり，それ以外の 3 つの t に対応する x はそれぞれ 2 つずつあるが，$y = \cos x$ のグラフの直線 $x = \pi$ に関する対称性によりその 2 つの解の和はいずれも 2π である．したがって，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\pi + 2\pi + 2\pi + 2\pi = \mathbf{7}\pi$ である．

(5)　(4) の $y = g(t)$ のグラフから $0 < g(t) \leqq \dfrac{25}{8}$ がわかるので，

$$(-\infty <)\ \log_5(-2t^2-3t+2) = \log_5 g(t) \leqq \log_5 \frac{25}{8}$$

であるから $20^{f(x)}$ の最大値は $20^{\log_5 \frac{25}{8}}$ である．ここで，

$$\begin{aligned}
\log_{10} 20^{\log_5 \frac{25}{8}} &= \log_{10} 20^{2-3\log_5 2} \\
&= (2-3\log_5 2)(1+\log_{10} 2) \\
&= \left(2 - \frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 5}\right)(1+\log_{10} 2) \\
&= \left(2 - \frac{3\log_{10} 2}{1-\log_{10} 2}\right)(1+\log_{10} 2) \\
&= \frac{(2-5\log_{10} 2)(1+\log_{10} 2)}{1-\log_{10} 2} \\
&= \frac{0.495 \times 1.301}{0.699} \\
&\fallingdotseq 0.921
\end{aligned}$$

となるが，

$$\log_{10} 8 = 3\log_{10} 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030 < 0.921 < 0.9542 = \log_{10} 9$$

であることから，

$$8 < 20^{\log_5 \frac{25}{8}} < 9$$

がわかり，さらに， $20^{f(x)}$ の値域は $0 < 20^{f(x)} \leqq 20^{\log_5 \frac{25}{8}} (= 8.\cdots)$ であることもわかるので，$20^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は **8** であり，$20^{f(x)}$ が整数となるとき，その整数値は 1，2，3，$\cdots$，8 の 8 個である．ここで，$g(t) = 3$ となるときの $20^{\log_5 g(t)} = 20^{\log_5 3}$ の値について，

$$\begin{aligned}
\log_{10} 20^{\log_5 3} &= (\log_5 3)(\log_{10} 20) \\
&= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5}(1+\log_{10} 2) \\
&= \frac{0.4771 \times 1.301}{0.699} \\
&\fallingdotseq 0.888
\end{aligned}$$

となるが，

$$\log_{10} 7 = 0.8451 < 0.888 < 0.9030 = \log_{10} 8$$

であることから

$$7 < 20^{\log_5 3} < 8$$

となる．このことから，$20^{f(x)} = 8$ となる t は $-1 < t < -\dfrac{1}{2}$ の範囲に 2 つあることがわかり（このとき対応する x の値は 4 個），$20^{f(x)} = 7$，6，5，4，3，2，1 となる t はそれぞれについて $-\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{1}{2}$ に 1 つずつ（対応する x の値はそれぞれ 2 個ずつ）あることがわかる．したがって，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総数は **18** となることがわかる．また，このとき t の値は全部で 9 個あり，それぞれの t の値に対応する x の値は 2 個ずつあるが，(4) と同様の対称性に考慮すると 2 個の解の和はいずれも 2π であるから，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $2\pi \times 9 = \mathbf{18}\pi$ である．

II　$0 < p < 1$ とする。表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ である 1 枚の硬貨 A がある。

(1)　$p = \dfrac{1}{3}$ とする。1 枚の便貨 A を 3 回続けて投げるとき，表がちょうど 2 回出る確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり，少なくとも 1 回表が出る確率は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}$ である。

(2)　n を 2 以上の自然数とする。 1 枚の硬貨 A を n 回続けて投げる試行において，表が 2 回以上続けて出ない事象を X_n とする。

(i)　X_n のうち，n 回目に表，n 回目に裏が出る場合の数を，それぞれ a_n，b_n とするとき，

$$a_2 = \boxed{キ},\quad b_2 = \boxed{ク},$$
$$a_3 = \boxed{ケ},\quad b_3 = \boxed{コ},$$
$$a_4 = \boxed{サ},\quad b_4 = \boxed{シ}$$

である。

(ii)　$p = \dfrac{1}{2}$ とする。 X_n の確率を $P(X_n)$ とするとき

$$P(X_5) = \frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタ}},\quad P(X_{10}) = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}$$

である。

(3)　1 枚の硬貨 A を続けて投げる試行において，次の 2 つのことがわかっている。

- A を 5 回続けて投げる試行において，表がちょうど 3 回出る確率は，表が 3 回以上出てかつ表がちょうど 3 回続けて出る確率よりも大きい。
- A を 15 回続けて投げる試行において，表がちょうど k 回 $(0 \leqq k \leqq 15)$ 出る確率を比較すると，確率が最大となるのは $k = 12$ のときのみである。

このとき，p のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}} < p < \dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。

解答

解答記号	正解
ア/イ	$\dfrac{2}{9}$
ウエ/オカ	$\dfrac{19}{27}$
キ	1
ク	2
ケ	2
コ	3

解答記号	正解
サ	3
シ	5
スセ/ソタ	$\dfrac{13}{32}$
チ/ツテ	$\dfrac{9}{64}$
ト/ナ	$\dfrac{3}{4}$
ニ/ヌ	$\dfrac{7}{9}$

解説

(1) 硬貨を 3 枚続けて投げて表が 2 回，裏が 1 回出る確率は ${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$ と求まる．

「少なくとも 1 回表が出る」の余事象は「1 回も表が出ない」ことであるから，求める確率は $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{19}{27}}$ と求まる．

(2) X_n のうちで考える．表を○，裏を×と表すことにする．○が連続しないとき○の前には必ず×が並ぶことに気をつける．

(i) $n=2$ のとき，2 回目が○となるのは×○と並ぶときより，$a_2=\mathbf{1}$．また，2 回目が×となるのは○×，××と並ぶときより，$b_2=\mathbf{2}$．

$n=3$ のとき，3 回目が○となるのは 2 回目が×であるときより，$a_3=b_2=\mathbf{2}$．また，3 回目が×となるときは 2 回目は○でも×でもよいので，$b_3=a_2+b_2=\mathbf{3}$．

$n=4$ のとき，4 回目が○となるのは 3 回目が×であるときより，$a_4=b_3=\mathbf{3}$．また，4 回目が×となるときは 3 回目は○でも×でもよいので，$b_4=a_3+b_3=\mathbf{5}$．

(ii) (i) での議論を一般化すると，

$n+1$ 回目が○となるのは n 回目が×であるときより，$a_{n+1}=b_n$

$n+1$ 回目が×となるのは n 回目は○でも×でもよいので，$b_{n+1}=a_n+b_n$

ここから a_n を消去すると，$n\geqq 2$ のとき $b_{n+1}=b_{n-1}+b_n$ という漸化式を得る．$b_2=2$, $b_3=3$ を順に漸化式に当てはめていくと $b_4=5$, $b_5=8$, $b_6=13$, $b_7=21$, $b_8=34$, $b_9=55$, $b_{10}=89$ と求まる．X_n の場合の数を c_n とおくと，$c_n=a_n+b_n$ であるので，$a_{n+1}=b_n$ を用いて $c_5=a_5+b_5=b_4+b_5=13$, $c_{10}=a_{10}+b_{10}=b_9+b_{10}=144$ となる．

表が出る確率，裏が出る確率はいずれも $\dfrac{1}{2}$ であるので $P(X_5)=\dfrac{c_5}{2^5}=\boldsymbol{\dfrac{13}{32}}$, $P(X_{10})=\dfrac{c_{10}}{2^{10}}=\boldsymbol{\dfrac{9}{64}}$ と求まる．

別解

$P(X_{10})$ については，5 回目が表であるか裏であるかで場合分けして考えてもよい．5 回目に裏が出た場合は残りの 5 回分の確率は $P(X_5)$ として計算でき，5 回目に表が出た場合は 6 回目は裏であり残りの 4 回分については $P(X_4)$ として計算できるので，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
P(X_{10})&=\frac{b_5}{2^5}\times P(X_5)+\frac{a_5}{2^5}\times\frac{1}{2}\times P(X_4)\\
&=\frac{b_5}{2^5}\times\frac{c_5}{2^5}+\frac{a_5}{2^5}\times\frac{1}{2}\times\frac{c_4}{2^4}\\
&=\frac{8\times 13}{2^{10}}+\frac{5\times 8}{2^{10}}\\
&=\frac{18}{2^7}=\frac{9}{2^6}
\end{aligned}
$$

(3)
- 1 つ目の条件で硬貨を 5 枚続けて投げて表が 3 回，裏が 2 回出る確率は ${}_5\mathrm{C}_3\,p^3(1-p)^2$ と求まる．表が 3 回以上出てかつ表がちょうど 3 回続けて出る事象は，「○○○××」「○○○×○」「×○○○×」「○×○○○」「××○○○」の 5 通りあり，これらの確率の合計は $3p^3(1-p)^2+2p^4(1-p)$ である．

  よって条件は ${}_5\mathrm{C}_3\,p^3(1-p)^2>3p^3(1-p)^2+2p^4(1-p)$ であり，これを解くと $p<\dfrac{7}{9}$ を得る．
- 15 回硬貨を投げて表がちょうど k 回出る確率を P_k とすると，$P_k={}_{15}\mathrm{C}_k\,p^k(1-p)^{15-k}$ である．これより $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}=\dfrac{p(15-k)}{(1-p)(k+1)}$ となる．条件を満たすには $\dfrac{P_{12}}{P_{11}}>1$ かつ $\dfrac{P_{13}}{P_{12}}<1$ が必要であり，これらを解くと，

$\dfrac{3}{4} < p < \dfrac{13}{16}$ を得る．逆に p がこの範囲にあるとき，

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \iff P_k < P_{k+1} \iff k < 16p - 1$$
$$\frac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \iff P_k > P_{k+1} \iff k > 16p - 1$$

であるが，$\dfrac{3}{4} < p < \dfrac{13}{16} \iff 11 < 16p - 1 < 12$ となるので，$P_1 < P_2 < \cdots < P_{11} < P_{12} > P_{13} > \cdots > P_{15}$ を満たす．

以上の 2 つの p の範囲の共通部分を求めて，$\boldsymbol{\dfrac{3}{4} < p < \dfrac{7}{9}}$ を得る．

III　原点を O とする座標空間において，3 点 A(4, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 4) を考える。

(1)　線分 BC の中点と O の距離は $\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ である。また，△ABC の面積は $\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ である。

(2)　O から平面 ABC に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ である。

(3)　球面 $x^2+y^2+z^2=8$ と平面 ABC が交わってできる円を D とし，点 X$(p,\ q,\ r)$ が D 上を動くとする。

(i)　D の半径は $\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ である。

(ii)　$q+r$, qr をそれぞれ p を用いて表すと

$$q+r=\boxed{サ}-p,\qquad qr=\left(p-\boxed{シ}\right)^2$$

である。

(iii)　p のとりうる値の範囲は $\boxed{ス} \leqq p \leqq \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である。

(iv)　3 点 P$(p,\ 0,\ 0)$, Q$(0,\ q,\ 0)$, R$(0,\ 0,\ r)$ を頂点とする △PQR の面積を S とする。S を p を用いて表すと

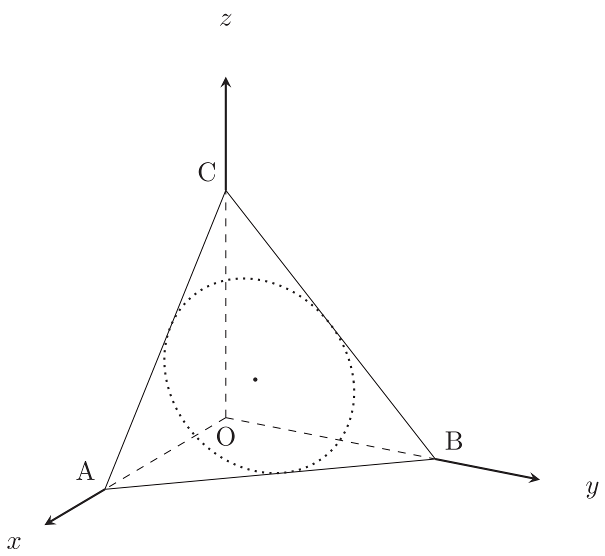
$$S=\sqrt{\boxed{タチ}p^3+\boxed{ツ}p^2-\boxed{テ}p+\boxed{ト}}$$

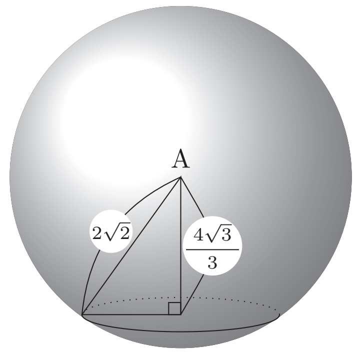
であり，S の最小値は $\dfrac{\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニヌ}}}{\boxed{ネ}}$ である。

解答

解答記号	正解
$ア\sqrt{イ}$	$2\sqrt{2}$
$ウ\sqrt{エ}$	$8\sqrt{3}$
$\dfrac{オ\sqrt{カ}}{キ}$	$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{ク\sqrt{ケ}}{コ}$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$
サ	4
シ	2
ス, $\dfrac{セ}{ソ}$	0, $\dfrac{8}{3}$
タチ, ツ, テ, ト	−2, 8, 8, 4
$\dfrac{ナ\sqrt{ニヌ}}{ネ}$	$\dfrac{2\sqrt{33}}{9}$

解説





(1)　BC の中点を M とすると，M(0, 2, 2) であるので OM $= \mathbf{2\sqrt{2}}$.

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-4,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-4,\ 0,\ 4)$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 4\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 4\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 16$ であるので，△ABC の面積を T とすると，

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{32 \cdot 32 - 16^2} = \mathbf{8\sqrt{3}}$$

(2)　四面体 OABC の体積を V，O から平面 ABC に下した垂線の長さを h とすると，

$$V = \frac{1}{3}Th \iff \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{3} \cdot h \iff h = \mathbf{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

別解

A，B，C はそれぞれ切片であるので，平面 ABC の方程式は $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1 \iff x + y + z = 4$ である．この平面と点 (0, 0, 0) との距離は，点と平面の距離公式を用いると

$$h = \frac{|0 + 0 + 0 - 4|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \mathbf{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

(3)　(i)　D の半径を R とすると，球面の半径が $2\sqrt{2}$，$h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ であるので，

$$R = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \mathbf{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

別解

R は △ABC の内接円の半径となるので，

$$\frac{1}{2}R(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = 8\sqrt{3} \iff R = \mathbf{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルを $\overrightarrow{n} = (a,\ b,\ c)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = -4a + 4b = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{n} = -4a + 4c = 0$ から $a = b = c$，つまり垂直なベクトルのひとつとして $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 1)$ がとれる（あるいはベクトルの外積を用いてもよい）．したがって，平面 ABC の方程式は

$$1 \cdot (x - 4) + 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 0) = 0 \iff x + y + z = 4$$

となる（あるいは (2) の別解のように切片方程式を用いてもよい）．

別解

平面 ABC 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \iff (x-4,\ y,\ z) = (-4s-4t,\ 4s,\ 4t)$$

から $s,\ t$ を消去しても $x+y+z=4$ が得られる（別解終わり）.

以上より，$(p,\ q,\ r)$ は $\begin{cases} p^2+q^2+r^2=8 \cdots ① \\ p+q+r=4 \cdots ② \end{cases}$ を満たす．② より，$q+r=\boldsymbol{4-p}$ を得る．これを① に代入することにより，

$$\begin{aligned} & p^2+q^2+r^2=8 \\ \iff & p^2+(q+r)^2-2qr=8 \\ \iff & p^2+(4-p)^2-8=2qr \\ \iff & qr=p^2-4p+4=\boldsymbol{(p-2)^2} \end{aligned}$$

を得る．

(iii) $q,\ r$ は 2 次方程式 $t^2-(q+r)t+qr=0$ の実数解であるので，判別式を D_1 とすると，

$$D_1=(q+r)^2-4qr=(4-p)^2-4(p-2)^2=-3p^2+8p$$

であり，これが実数解をもつので，$-3p^2+8p \geqq 0 \iff \boldsymbol{0 \leqq p \leqq \frac{8}{3}}$ となる．

(iv) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-p,\ q,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-p,\ 0,\ r)$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{p^2+q^2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\sqrt{p^2+r^2}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=p^2$ であるので，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2)(p^2+r^2)-p^4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{p^4+(q^2+r^2)p^2+q^2r^2-p^4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(8-p^2)p^2+(p-2)^4} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{-2p^3+8p^2-8p+4}} \end{aligned}$$

ここで，$f(p)=-2p^3+8p^2-8p+4$ とすると，$f'(p)=-2(3p^2-8p+4)=-2(p-2)(3p-2)$ であるので，$0 \leqq p \leqq \frac{8}{3}$ における増減は以下のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{8}{3}$
$f'(p)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(p)$	4	$\searrow$	$\frac{44}{27}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{44}{27}$

したがって，S の最小値は $\sqrt{\frac{44}{27}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{33}}{9}}$ である．

講評

Ⅰ［三角関数，指数対数］（やや易〜やや難）

三角関数と指数対数の融合問題．(1)〜(3) は基本的で落とせない．(4) 以降は t と x の対応関係を考える必要があり，特に (5) は計算量も多く，難しく感じた受験生は多かっただろう．

Ⅱ［場合の数と確率］（標準）

硬貨を複数回投げた時の表の出る回数に関する問題．(1) は基本的で落とせない．(2) の (ii) では，(i) での作業により a_n と b_n の関係に気付くことができたかがポイントとなる．(3) ではそれぞれの箇条書きで問われている内容が異なる．それぞれ典型的ではあるものの作業量が多く，時間内にすべて正答するのは難しかったかもしれない．

Ⅲ［空間図形，数学Ⅱの微分］（やや難）

球面と平面に関する問題．前半は典型的な処理であるため確実に得点したい．(2)，(3) は，平面の方程式を知っていれば手早く解けただろう．(3) の (iii) は実数条件を用いて求めるため，慣れていないと難しく感じるかもしれない．(iv) は計算量はやや多いので，丁寧に計算をしたい．

今年度も引き続き他学部と共通のマークシート形式であった．例年と同じく出題テーマは典型的であるものの，各大問の中盤以降は難易度が高くなっている．作業量も多く，例年より点数の取りにくいセットであった．大問Ⅰ (1)(2)(3)，Ⅱ (1)(2)(i)，Ⅲ (1)(2) までは確実に取りたい．大問Ⅰ (4)，大問Ⅱの後半，大問Ⅲ (3) 以降でどれだけ立ち回れたかの勝負だろう．目標は 55%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ