解答速報

近畿大学医学部（後期）　数学

2025年 2月 22日実施

1　3 以上の自然数 n に対して，x の多項式

$$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)$$

の展開を考える．次の問いに答えよ．

(1)　x^n の係数を求めよ．

(2)　定数項を求めよ．

(3)　x^{n-1} の係数を求めよ．

(4)　x^{n-2} の係数を求めよ．

(5)　x^{n-3} の係数を求めよ．

解答

(1) 1　(2) $n!$　(3) $\dfrac{1}{2}n(n+1)$　(4) $\dfrac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$　(5) $\dfrac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)$

解説

$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)$ とする．

(1)　$f(x)$ の n 個の因数全てから x の項を選んで積を作ることで x^n の項が現れるので，$f(x)$ の x^n の係数は $\mathbf{1}$ である．

(2)　$f(x)$ の n 個の因数全てから定数項を選んで積を作ることになるので，$f(x)$ の定数項は $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n=\boldsymbol{n!}$ である．

(3)　$f(x)$ の n 個の因数のうち，1 箇所だけ定数項を選び，残りの $n-1$ 箇所からは x の項を選んで積を作ることで x^{n-1} の項が現れる．よって，$f(x)$ の x^{n-1} の係数は，

$$1+2+3+\cdots+n=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

(4)　$f(x)$ の n 個の因数のうち，2 箇所だけ定数項を選び，残りの $n-2$ 箇所からは x の項を選んで積を作ることで x^{n-2} の項が現れる．よって，$f(x)$ の x^{n-2} の係数を T_n とすると，T_n は表の太枠内の和なので，(表全体の和) から (灰色部分の和) を引いて $\dfrac{1}{2}$ 倍すればよい．

	1	2	3		$n-1$	n
1	$1\cdot1$	$1\cdot2$	$1\cdot3$	$\cdots$		$1\cdot n$
2	$2\cdot1$	$2\cdot2$	$2\cdot3$	$\cdots$		$2\cdot n$
3	$3\cdot1$	$3\cdot2$	$3\cdot3$	$\cdots$		$3\cdot n$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$(n-1)\cdot1$	$(n-1)\cdot2$	$(n-1)\cdot3$	$\cdots$		$(n-1)\cdot n$
n	$n\cdot1$	$n\cdot2$	$n\cdot3$	$\cdots$		$n\cdot n$

(表全体の和)

$= (1\text{ 行目の和}) + (2\text{ 行目の和}) + \cdots + (n\text{ 行目の和})$

$= 1(1+2+\cdots+n) + 2(1+2+\cdots+n)$

$\qquad + \cdots + n(1+2+\cdots+n)$

$= (1+2+\cdots+n)^2$

$= \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

よって，

$$T_n = \left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\} \times \frac{1}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)}$$

別解

表の太枠内の各列を足したものの和をとると考える（先に縦に足し合わせたものをシグマ計算する）と

$$\sum_{l=2}^{n}\left(l\sum_{k=1}^{l-1}k\right) = \sum_{l=2}^{n} l\frac{(l-1)l}{2}$$
$$= \sum_{l=2}^{n}\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^2}{2}\right)$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^2}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)}$$

(5)　$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ から異なる 3 数 $i,\ j,\ k$ を選び，その積 ijk をすべての選び方について足し合わせてできる数を $S_{i,j,k}\left(= \displaystyle\sum_{1 \leqq i<j<k \leqq n} ijk\right)$ と書くことにする．x^{n-3} の係数は $S_{i,j,k}$ に等しい．

　また $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ から異なる 2 数 $i,\ j\ (i<j)$ を選び，その積 i^2j および ij^2 をすべての選び方について足し合わせてできる数を $S_{i,j}\left(= \displaystyle\sum_{1 \leqq i<j \leqq n}(i^2j+ij^2) = \sum_{i \neq j} i^2j\right)$ と書くことにする．

　さらに $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = S_1,\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = S_2,\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = S_3$ とおく．$S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2},\ S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

$S_3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ である．

次の式の左辺の展開を考えると右辺になることがわかる．

$$(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1+2+\cdots+n)=S_3+S_{i,j}$$

したがって $S_2S_1=S_3+S_{i,j}$ つまり $S_{i,j}=S_2S_1-S_3$ である．また，次の式の左辺の展開を考えると右辺になることがわかる．

$$(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)=S_3+3S_{i,j}+6S_{i,j,k}$$

したがって ${S_1}^3=S_3+3S_{i,j}+6S_{i,j,k}$, つまり

$$\begin{aligned}
6S_{i,j,k}&={S_1}^3-S_3-3S_{i,j}\\
&={S_1}^3-S_3-3(S_2S_1-S_3)\\
&={S_1}^3+2S_3-3S_2S_1\\
&=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^3+2\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n^2(n+1)^2}{8}\{n(n+1)+4-2(2n+1)\}\\
&=\frac{n^2(n+1)^2}{8}(n^2-3n+2)\\
&=\frac{1}{8}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)
\end{aligned}$$

求める答えは $S_{i,j,k}=\boldsymbol{\dfrac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}$ である．

$\boxed{\text{別解}}$

$1\leqq i<j<k\leqq n$ である 3 数のうち最も大きい k $(3\leqq k\leqq n)$ を決めると，$\{1,\ 2,\ \cdots,\ k-1\}$ から取った異なる $i,\ j$ の積の総和は (4) の答えに $n=k-1$ を代入して $\dfrac{1}{24}(k-2)(k-1)k(3k-1)$ であることがわかる

従って求める答 $S_{i,j,k}$ は

$$
\begin{aligned}
S_{i,j,k} &= \sum_{k=3}^{n} k \cdot \frac{1}{24}(k-2)(k-1)k(3k-1) \\
&= \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-1)k^2(3k-1) \quad (k=1 \text{ から足しても同じ}) \\
&= \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k-1)k\left\{3(k+1)(k+2)-10(k+1)+4\right\} \\
&= \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}\left\{3(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)-10(k-2)(k-1)k(k+1)+4(k-2)(k-1)k\right\} \\
&= \frac{1}{24}\left\{\frac{3}{6}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{10}{5}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\right. \\
&\qquad \left. +\frac{4}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{48}(n-2)(n-1)n(n+1)\left\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\right\} \\
&= \frac{1}{48}(n-2)(n-1)n(n+1)(n^2+n) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

2 半径 4 の円に内接する △ABC が $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$ を満たしている．このとき，$\cos A =$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$\mathrm{BC} =$ $\boxed{\text{イ}}$ である．また，△ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，△ABC の内接円の半径は $\boxed{\text{エ}}$ である．∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，△ABD の面積は，$\boxed{\text{オ}}$ であり， $\mathrm{AD} =$ $\boxed{\text{カ}}$ である．

解答

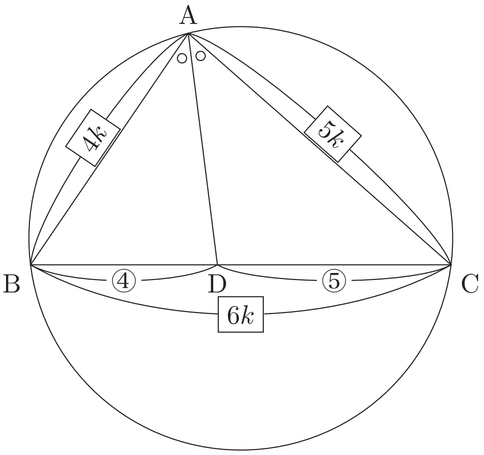
ア $\dfrac{1}{8}$　イ $3\sqrt{7}$　ウ $\dfrac{105\sqrt{7}}{16}$　エ $\dfrac{7}{4}$　オ $\dfrac{35\sqrt{7}}{12}$　カ $\dfrac{5\sqrt{7}}{3}$

解説

$\mathrm{BC} = a,\ \mathrm{CA} = b,\ \mathrm{AB} = c$ とし，外接円の半径を R とする．正弦定理から $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \iff \sin A = \dfrac{a}{2R}$ を得るので，

$$\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4 \iff a : b : c = 6 : 5 : 4$$

がわかる．$a = 6k,\ b = 5k,\ c = 4k\ (k > 0)$ とおくことができるので，△ABC に余弦定理を用いることにより，



$$\cos A = \frac{16k^2 + 25k^2 - 36k^2}{2 \cdot 4k \cdot 5k} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

また, $0 < A < \pi$ のもとで, $\sin A = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{8}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

であるので，正弦定理から

$$2 \cdot 4 = \frac{a}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} \iff a(= \mathrm{BC}) = \mathbf{3\sqrt{7}}$$

したがって，$k = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$b = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$，$c = 2\sqrt{7}$ が得られる．△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \mathbf{\frac{105\sqrt{7}}{16}}$$

内接円の半径を r とすると，$S = \dfrac{1}{2}r(a + b + c)$ であるので,

$$\frac{105\sqrt{7}}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15\sqrt{7}}{2}r \iff r = \mathbf{\frac{7}{4}}$$

角の二等分線の性質より，$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 4 : 5$ であるので，△ABD の面積は △ABC の面積の $\dfrac{4}{9}$ 倍である．したがって △ABD の面積は $\dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{105\sqrt{7}}{16} = \mathbf{\dfrac{35\sqrt{7}}{12}}$.

$\cos A = 1 - 2\sin^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{8}$ であることから，$\sin \dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ を得る．△ABD の面積を考えることにより,

$$\frac{35\sqrt{7}}{12} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \mathrm{AD} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \iff \mathrm{AD} = \mathbf{\frac{5\sqrt{7}}{3}}$$

$\boxed{\text{別解 1}}$

$\cos B = \dfrac{16k^2+36k^2-25k^2}{2\cdot 4k\cdot 6k} = \dfrac{9}{16}$ であるので，$\triangle$ABD に余弦定理を用いて，

$$\mathrm{AD}^2 = 28 + \frac{112}{9} - 2\cdot 2\sqrt{7}\cdot\frac{4\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{9}{16} = \frac{175}{9}$$

であることから AD $= \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{7}}{3}}$.

$\boxed{\text{別解 2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{c}$ とおくと，

$$|\overrightarrow{b}| = 2\sqrt{7},\ |\overrightarrow{c}| = \frac{5\sqrt{7}}{2},\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = 2\sqrt{7}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{35}{8}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{5\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{c}}{9}$ であるので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 = \frac{1}{81}(25|\overrightarrow{b}|^2 + 40\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} + 16|\overrightarrow{c}|^2) = \frac{1}{81}(700+175+700) = \frac{175}{9}$$

であることから AD $= \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{7}}{3}}$.

$\boxed{\text{注釈}}$

一般に $\triangle$ABC において $\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とし，$\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{AC} = b$, $\mathrm{BD} = m$, $\mathrm{CD} = n$ とすると $\mathrm{AD} = \sqrt{bc - mn}$ が成り立つ．いまの場合，

$$\mathrm{AB} = c = 2\sqrt{7},\ \mathrm{AC} = b = \frac{5\sqrt{7}}{2},\ \mathrm{BD} = m = \frac{4\sqrt{7}}{3},\ \mathrm{CD} = n = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

であるから，$\mathrm{AD} = \sqrt{\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\cdot 2\sqrt{7} - \dfrac{4\sqrt{7}}{3}\cdot\dfrac{5\sqrt{7}}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{7}}{3}}$ である.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + (m+3)x$ が極値をもつとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) $y = f(x)$ の傾きが m である接線を l_1 とする．l_1 の方程式，およびその接点 A の座標を m を用いて表せ．

(3) 点 A において l_1 と直交する直線を l_2 とする．$y = f(x)$ と l_2 との交点のうち x 座標の最も小さい点の x 座標を α とするとき，α の最大値とそのときの m の値を求めよ．

解答

(1) $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいので， $f'(x) = 3x^2 + 6x + m + 3 = 0$ の判別式を D_1 として $D_1 > 0$ ならよい．

$$\frac{D_1}{4} = 3^2 - 3(m+3) > 0 \iff \boldsymbol{m < 0}$$

(2) 接線の傾きが m となる点の x 座標を $x = t$ とすると，$f'(t) = 3t^2 + 6t + m + 3 = m$ より $t = -1$ となるので，接点 A の座標は $\mathbf{A(-1,\ -m-1)}$ であり，接線 l_1 の方程式は $l_1 : y = m(x+1) - m - 1$ を整理して $\boldsymbol{y = mx - 1}$ である．

(3) (1) の条件のもとで，直線 l_2 の方程式は $l_2 : y = -\dfrac{1}{m}(x+1) - m - 1 = -\dfrac{1}{m}x - m - \dfrac{1}{m} - 1$ となる．これと $y = f(x)$ の交点の x 座標は

$$x^3 + 3x^2 + (m+3)x = -\frac{1}{m}x - m - \frac{1}{m} - 1 \iff (x+1)\left(x^2 + 2x + m + \frac{1}{m} + 1\right) = 0 \cdots ①$$

の解である．ここで，$g(x) = x^2 + 2x + m + \dfrac{1}{m} + 1$ とおくと，

$$g(x) = (x+1)^2 + m + \frac{1}{m} = 0 \iff (x+1)^2 = -m - \frac{1}{m} \iff x = -1 \pm \sqrt{-m - \frac{1}{m}}$$

となる．ここで (1) より $m < 0$ であるから，これらは異なる 2 つの実数である．また，これより $f(x) = 0$ の異なる 3 つの実数解の大小関係もわかり， $\alpha = -1 - \sqrt{-m - \dfrac{1}{m}}$ となる．$m < 0$ より $-m > 0$, $-\dfrac{1}{m} > 0$ なので相加平均・相乗平均の関係を用いると，

$$\begin{aligned}\alpha &= -1 - \sqrt{-m - \frac{1}{m}} \\ &\leqq -1 - \sqrt{2\sqrt{(-m)\cdot\left(-\frac{1}{m}\right)}} \\ &= -1 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

がわかる．ここで等号は $-m = -\dfrac{1}{m}$ のときで，$m < 0$ を考慮すると $m = -1$ のときに成立するので，α の最大値は $\boldsymbol{-1 - \sqrt{2}}$，そのときの m の値は $\boldsymbol{-1}$ である．

講評

[1] ［数列］（易～難）

整式の展開係数について考える問題．(3) までは落とせない．(4) は解いた経験の有無で差がつくだろうが，できた受験生も多いだろう．(5) は (4) の応用である．$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^3$ から不適なものを除く，という方針がわかりやすいだろうが，時間内に正解を導くのは難しいだろう．

[2] ［図形と計量］（やや易）

三角形の計量に関する基本的な設問であった．正弦定理，余弦定理，面積公式や，角の二等分線の性質などを利用する問題である．計算ミスに注意しながらできるだけ完答を目指したい．

[3] ［数学 II の微積分］（やや易～標準）

3 次関数の接線や 3 次方程式の解に関する問題であった．基本的な作業がしっかりできれば難しくはない．(1)(2) は確実に完答したい．(3) はしっかりとした記述が求められるが，できるだけ完答を目指したい．

昨年度から，後期試験のみが医学部独自の問題となった．[1] の (5) の難易度が高いが，それ以外は易～標準の難易度である．昨年度は例年より易しめだったが，今年度はそれよりさらに得点しやすい問題の割合が多い．

一次合格の目標は 85%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ