医学部進学予備校 メビオ

医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

久留米大学医学部（後期）　数学

2025年 3月 8日実施

1.　次の問いに答えよ。

(1)　a は実数とする。x の 2 次方程式

$$x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 1 = 0$$

が実数解をもつとき，判別式を利用して a のとる値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2)　実数 a を変化させたときに，(1) の実数解 x のとる値の範囲を求めると $-\boxed{\text{エ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{オ}}$ となる。

(3)　a，b は異なる実数で，2 つの 2 次方程式

$$x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 1 = 0,$$
$$x^2 - 2bx + 2b^2 - 6b + 1 = 0$$

が共通解をもつとき，その共通解を c として，

$$a + b = c + \boxed{\text{カ}}, \quad ab = \frac{c^2 + \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

となる。$d = |a| + |b| + |c|$ とおく。c を変化させるとき，d の値の範囲は $\boxed{\text{ケ}} \leqq d < \boxed{\text{コサ}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\text{ア} - \text{イ}\sqrt{\text{ウ}} \leqq a \leqq \text{ア} + \text{イ}\sqrt{\text{ウ}}$	$3 - 2\sqrt{2} \leqq a \leqq 3 + 2\sqrt{2}$
$-\text{エ} \leqq x \leqq \text{オ}$	$-1 \leqq x \leqq 7$
カ	3
$\dfrac{c^2 + \text{キ}}{\text{ク}}$	$\dfrac{c^2 + 1}{2}$
$\text{ケ} \leqq d < \text{コサ}$	$3 \leqq d < 17$

解説

(1)　$x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 1 = 0 \cdots ①$ の判別式を D_1 とすると，$D_1 \geqq 0$ であればよいので，

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 2a^2 + 6a - 1 \geqq 0 \iff \mathbf{3 - 2\sqrt{2}} \leqq a \leqq \mathbf{3 + 2\sqrt{2}}$$

である.

(2) ① を $2a^2-2(x+3)a+x^2+1=0$ $\cdots$② のように a についての 2 次方程式と考える. このとき, a は実数であるから, ② の判別式を D_2 とすると, $D_2 \geqq 0$ より

$$\frac{D_2}{4}=(x+3)^2-2(x^2+1)\geqq 0 \iff -1\leqq x\leqq 7$$

となるので, (1) の実数解 x のとる値の範囲は $\mathbf{-1} \leqq x \leqq \mathbf{7}$ である.

(3)

$$\begin{cases} x^2-2ax+2a^2-6a+1=0\cdots③ \\ x^2-2bx+2b^2-6b+1=0\cdots④ \end{cases}$$

において, 共通解 $x=c$ が虚数解であるとすると, ③, ④ は実数係数の方程式であるからその共役な複素数も解となり, ③ と ④ のそれぞれの異なる 2 つの解からなる集合が完全に一致する. このとき ③, ④ は同一の 2 次方程式となり, $a=b$ となることを意味するので矛盾である. すなわち c は実数であり, (1) より a も b も正であることがわかる. いま,

$$\begin{cases} c^2-2ac+2a^2-6a+1=0 \\ c^2-2bc+2b^2-6b+1=0 \end{cases}$$

が成り立つので a, b は t についての 2 次方程式

$$c^2-2tc+2t^2-6t+1=0 \iff 2t^2-2(c+3)t+c^2+1=0\cdots⑤$$

の異なる 2 つの実数解とみなすことができる. したがって, 解と係数の関係により $a+b=c+\mathbf{3}$, $ab=\dfrac{c^2+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ となる. また, a と b は異なるので ⑤ の判別式を D_3 とすると,

$$\frac{D_3}{4}=(c+3)^2-2(c^2+1)>0 \iff -1<c<7\cdots⑥$$

であることに注意しておく. ここで, したがって, $a+b=c+3$ および ⑥ より

$$d=|a|+|b|+|c|=a+b+|c|=c+3+|c|=\begin{cases} 3 & (-1<c\leqq 0) \\ 2c+3 & (0\leqq c<7) \end{cases}$$

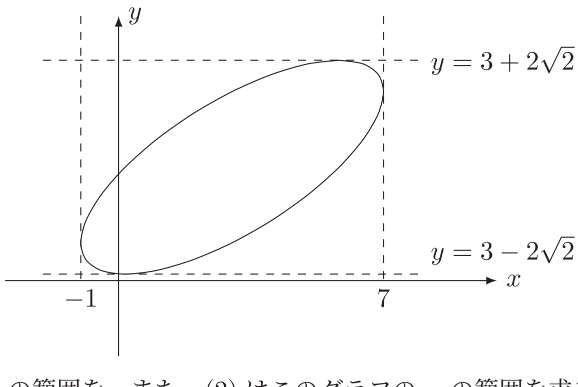
となるので, d の範囲は $\mathbf{3} \leqq d < \mathbf{17}$ である.

注釈

a を y に置き換えて xy 平面の $x^2-2yx+2y^2-6y+1=0$ で表される曲線を考える.

$$x^2-2yx+2y^2-6y+1=0 \iff (x-y)^2+(y-3)^2=8$$

なので, この式は斜めの楕円を表す.



(1) はこのグラフの $y(=a)$ の範囲を, また, (2) はこのグラフの x の範囲を求めていることになる.

(3) は $x=c$ としたときの交点の y 座標が a, b であることを意味している. c の範囲が (2) より $-1<c<7$ であることがわかる. また (1) より a, b ともに正であることもわかる. あとは c の正負に気をつけて, $|a|+|b|+|c|$ を c で表し, その範囲を考えればよい.

2. $\mathrm{OA}=1$, $\mathrm{OB}=1$, $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ を満たす三角形 OAB があり，OA の中点を M，OB を $1:2$ に内分する点を N として，2 本の線分 AN，BM の交点を P とする。

(1) $\mathrm{AP}:\mathrm{PN}=\boxed{\text{シ}}:\boxed{\text{ス}}$ かつ $\mathrm{OP}=\dfrac{1}{\boxed{\text{セ}}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}+\boxed{\text{タ}}\cos\theta}$ である。

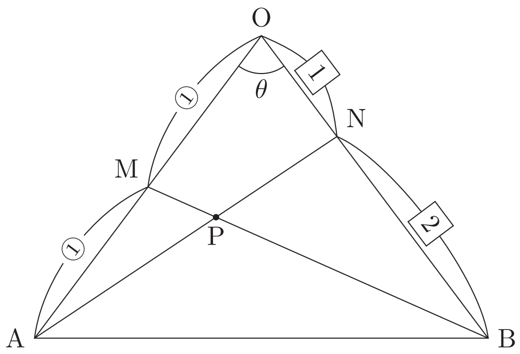
(2) $a=\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\mathrm{OP}$ とすると，$a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であり，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{a-\mathrm{OP}}{\theta^2}=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

解答

解答記号	正解
シ : ス	3 : 2
$\dfrac{1}{\text{セ}}\sqrt{\text{ソ}+\text{タ}\cos\theta}$	$\dfrac{1}{5}\sqrt{5+4\cos\theta}$
$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$	$\dfrac{3}{5}$
$\dfrac{\text{テ}}{\text{トナ}}$	$\dfrac{1}{15}$

解説

(1)



メネラウスの定理から，

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MA}}\times\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}\times\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{BO}}=1\iff\frac{1}{1}\times\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}\times\frac{2}{3}=1$$

これより，$\mathrm{AP}:\mathrm{PN}=\mathbf{3}:\mathbf{2}$ を得る．

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\cos\theta$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{ON}}}{5}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$$

であることから，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=\frac{1}{25}\left(4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\right)\\&=\frac{1}{25}(5+4\cos\theta)\end{aligned}$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{1}{\mathbf{5}}\sqrt{\mathbf{5}+\mathbf{4}\cos\theta}$ を得る．

(2)

$$a = \lim_{\theta \to +0} \frac{1}{5}\sqrt{5+4\cos\theta} = \frac{1}{5}\sqrt{5+4} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

また,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to +0} \frac{a - \mathrm{OP}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \to +0} \frac{1}{5} \cdot \frac{3 - \sqrt{5+4\cos\theta}}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \to +0} \frac{1}{5} \cdot \frac{4 - 4\cos\theta}{\theta^2(3 + \sqrt{5+4\cos\theta})} \\
&= \lim_{\theta \to +0} \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{(3+\sqrt{5+4\cos\theta})(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{4}{5} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{6 \cdot 2} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{15}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

記述形式ではないのでロピタルの定理を使ってもよい.

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to +0} \frac{a - \mathrm{OP}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \to +0} \frac{1}{5} \cdot \frac{3 - \sqrt{5+4\cos\theta}}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \to +0} \frac{1}{5} \cdot \frac{\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}}}{2\theta} \\
&= \lim_{\theta \to +0} \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{5+4\cos\theta}} \\
&= \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{15}}
\end{aligned}$$

3. xy 平面の原点を O とする。O から x 軸の正方向に 1 だけ進んだ点 $(1,\ 0)$ を P_1 とする。そこから進行方向を反時計回りに 120° 変え，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だけ進んだ点を P_2 とする。さらに進行方向を反時計回りに 120° 変え，$\dfrac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_3 とする。同様に，P_4，P_5，$\cdots$，P_n を 120° ずつ反時計回りに進行方向を変え，進む長さを前回の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍にして得られる点とするとき，次の問いに答えよ。

(1) P_2 の座標は $\left(\boxed{\text{ニ}} - \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{4},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{4}\right)$，

P_3 の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ノ}} - \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{4},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}} - \sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{4}\right)$ である。

(2) 点 P_n は n を大きくすると，ある点 P_∞ に近づく。P_∞ の座標は

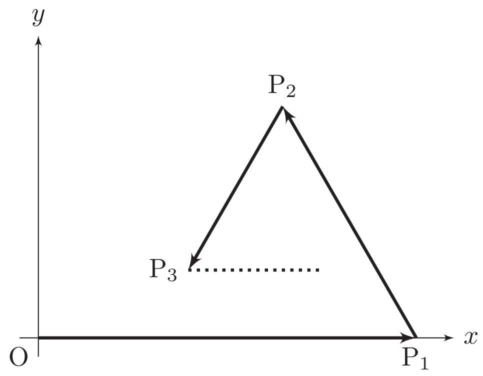
$$\left(\dfrac{\boxed{\text{ヘホ}} - \sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{14},\ \dfrac{\boxed{\text{ミ}}\sqrt{\boxed{\text{ム}}} - \boxed{\text{メ}}\sqrt{\boxed{\text{モ}}}}{14}\right)$$ である。

(3) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{3n}$ が直角三角形となるのは，$n = \boxed{\text{ヤ}}$ のときである。

解答

解答記号	正解
$\left(\text{ニ} - \dfrac{\sqrt{\text{ヌ}}}{4},\ \dfrac{\sqrt{\text{ネ}}}{4}\right)$	$\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$
$\left(\dfrac{\text{ノ} - \sqrt{\text{ハ}}}{4},\ \dfrac{\sqrt{\text{ヒ}} - \sqrt{\text{フ}}}{4}\right)$	$\left(\dfrac{3 - \sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{4}\right)$
$\left(\dfrac{\text{ヘホ} - \sqrt{\text{マ}}}{14},\ \dfrac{\text{ミ}\sqrt{\text{ム}} - \text{メ}\sqrt{\text{モ}}}{14}\right)$	$\left(\dfrac{10 - \sqrt{2}}{14},\ \dfrac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{14}\right)$
ヤ	2

解説



(1)　複素数平面上で点 P_n（n は自然数）を表す複素数を z_n とし，

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4}$$

とおく．このとき z_2 は次のようにして求められる．

$$\begin{aligned}z_2&=z_1+\alpha z_1\\&=1+\alpha\quad(\because z_1=1)\\&=1+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4}\\&=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{\sqrt{6}}{4}i\end{aligned}$$

この結果から，P_2 の座標は $\left(\mathbf{1}-\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{4},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{4}\right)$ である．

同様にして z_3 も次のようにして求められる．

$$\begin{aligned}z_3&=(1+\alpha+\alpha^2)z_1\\&=1+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{4}\\&=\left(\frac{3-\sqrt{2}}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}\right)i\end{aligned}$$

この結果から，P_3 の座標は $\left(\dfrac{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{2}}}{4},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}-\sqrt{\mathbf{3}}}{4}\right)$ である．

(2)　z_n は α を用いて次のように表される．

$$\begin{aligned}z_n&=(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1})z_1\\&=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\quad\cdots①\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\alpha^n|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$ であることから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$ が成り立つので，① より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}z_n&=\frac{1}{1-\alpha}\\&=\frac{4}{(4+\sqrt{2})-\sqrt{6}i}\\&=\frac{(10-\sqrt{2})+(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})i}{14}\end{aligned}$$

この結果から，P_∞ の座標は $\left(\dfrac{\mathbf{10}-\sqrt{\mathbf{2}}}{14},\ \dfrac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{6}}-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}{14}\right)$ である．

(3)　3 点 $\mathrm{P}_n(z_n)$，$\mathrm{P}_{2n}(z_{2n})$，$\mathrm{P}_{3n}(z_{3n})$ が直角三角形の頂点となるときを考える．

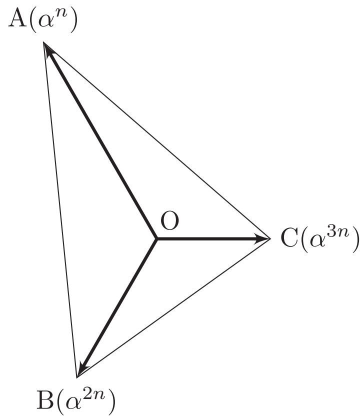
$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ と表されることから，これらの 3 点を次のように回転移動・平行移動することにより，3 点

α^n, α^{2n}, α^{3n} が直角三角形の頂点となる場合と同値であることがわかる.

$$
\begin{aligned}
&3\text{点 } \mathrm{P}_n(z_n),\ \mathrm{P}_{2n}(z_{2n}),\ \mathrm{P}_{3n}(z_{3n}) \text{ が直角三角形の頂点となる.}\\
\iff &3\text{点 } \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha},\ \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha},\ \frac{1-\alpha^{3n}}{1-\alpha} \text{ が直角三角形の頂点となる.}\\
\iff &3\text{点 } 1-\alpha^n,\ 1-\alpha^{2n},\ 1-\alpha^{3n} \text{ が直角三角形の頂点となる.}\\
\iff &3\text{点 } -\alpha^n,\ -\alpha^{2n},\ -\alpha^{3n} \text{ が直角三角形の頂点となる.}\\
\iff &3\text{点 } \alpha^n,\ \alpha^{2n},\ \alpha^{3n} \text{ が直角三角形の頂点となる.}
\end{aligned}
$$

ここで $\mathrm{A}(\alpha^n)$, $\mathrm{B}(\alpha^{2n})$, $\mathrm{C}(\alpha^{3n})$ とおく．$\arg\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$ であるから，自然数 n に対して $\arg\alpha^n$ のとり得る値は 0, $\pm\dfrac{2}{3}\pi$ である．$\arg\alpha^n = 0$ のとき，$\arg\alpha^{2n} = \arg\alpha^{3n} = 0$ となるので A, B, C が同一直線上となり不適．したがって $\arg\alpha^n = \pm\dfrac{2}{3}\pi$，つまり $n \equiv \pm 1 \pmod 3$ が必要である．以下，この条件下で考える．

まず $\arg\alpha^n = \dfrac{2}{3}\pi$ のときを考える．このとき $\arg\alpha^{2n} = \dfrac{4}{3}\pi$, $\arg\alpha^{3n} = 0$ であり，かつ $|\alpha^n| > |\alpha^{2n}| > |\alpha^{3n}|$ であるから右図のようになる．また $\arg\alpha^n = -\dfrac{2}{3}\pi$ のときはこの図とは上下対称なものになることもすぐわかる．したがって直角三角形 ABC の斜辺は辺 AB であることがわかるので，$\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\pi}{2}$ となる場合を考えることになる．したがって，



$$
\frac{\alpha^n - \alpha^{3n}}{\alpha^{2n} - \alpha^{3n}} = \frac{\alpha^n(1-\alpha^n)(1+\alpha^n)}{\alpha^{2n}(1-\alpha^n)} = \frac{1+\alpha^n}{\alpha^n} = 1 + \alpha^{-n}
$$

が純虚数となるときの n の値を求めることになる．明らかに $1 + \alpha^{-n} \fallingdotseq 0$ であるから，次の条件を満たすとよいことになる．

$$
[1+\alpha^{-n}\text{の実部}] = 0 \iff 1 + (\sqrt{2})^n \cos\left(-\frac{2n}{3}\pi\right) = 0 \iff \cos\frac{2n}{3}\pi = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \cdots②
$$

$\cos\dfrac{2n}{3}\pi$ の値は $-\dfrac{1}{2}$, 1 の 2 通りだけであるから，結局，② を満たす n の値は $n = \mathbf{2}$ のみである．

別解 1

上の解答では純虚数条件を使っているが，以下のように考えることもできる．

$|\alpha^n| = r$ とすると，

$$
\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = |\alpha^n| : |\alpha^{2n}| = 1 : r
$$

$$
\mathrm{OB} : \mathrm{OC} = |\alpha^{2n}| : |\alpha^{3n}| = 1 : r
$$

であり，

$$
\angle\mathrm{AOB} = \left|\arg\frac{\alpha^{2n}}{\alpha^n}\right| = 120^\circ
$$

$$
\angle\mathrm{BOC} = \left|\arg\frac{\alpha^{3n}}{\alpha^{2n}}\right| = 120^\circ
$$

であるから，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OBC}$ は相似であり，相似比は $1 : r$ である．また，これらから $\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ もわかるので，AB が直角三角形の斜辺となることから $r = |\alpha^n| = \dfrac{1}{2}$ がわかる．これより $n = \mathbf{2}$ が得られる．

別解 2

$$1-\alpha^{2n}=(1-\alpha^n)(1+\alpha^n),\quad 1-\alpha^{3n}=(1-\alpha^n)(1+\alpha^n+\alpha^{2n})$$

に注意すると，上の本解のはじめに行った同値での言い換えを以下のようにすることもできる．

3 点 $\mathrm{P}_n(z_n)$，$\mathrm{P}_{2n}(z_{2n})$，$\mathrm{P}_{3n}(z_{3n})$ が直角三角形の頂点となる．

$\iff$ 3 点 $\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$，$\dfrac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha}$，$\dfrac{1-\alpha^{3n}}{1-\alpha}$ が直角三角形の頂点となる．

$\iff$ 3 点 1，$1+\alpha^n$，$1+\alpha^n+\alpha^{2n}$ が直角三角形の頂点となる．

$\iff$ 3 点 0，α^n，$\alpha^n+\alpha^{2n}$ が直角三角形の頂点となる．

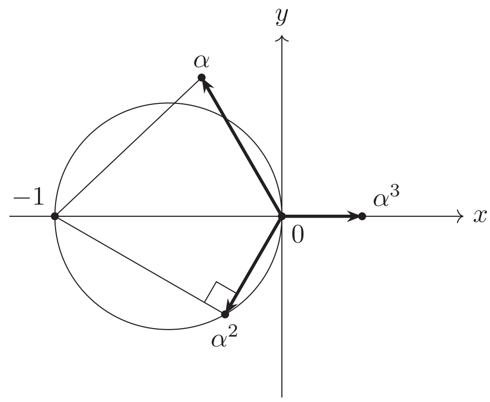
$\iff$ 3 点 0，1，$1+\alpha^n$ が直角三角形の頂点となる．

$\iff$ 3 点 -1，0，α^n が直角三角形の頂点となる．

点 -1，0 と，$n=1$，2，3 に対する α^n を図示すると右のようになる．このうち適するのは $n=2$ のみである．$n \geqq 4$ のときは，

- $n \equiv 0 \pmod 3$ であれば -1，0，α^n が同一直線上となるので三角形にならないから不適．
- $n \equiv \pm 1 \pmod 3$ であれば，α^n は図の円の内部の点となり，α^n における三角形の内角が鈍角となるため不適．

以上から，題意を満たすのは $n=\mathbf{2}$ である．



大的中

2025 年 3 月 5〜6 日 久留米大学医学部後期直前テキスト，久留米大学後期攻略講座

複素数平面上で，複素数 z_n によって点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を定義する．$z_0=0$，$z_1=1$ とし，また $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ を $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転して大きさを $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍すると $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}}$ になるものとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) z_6 を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n$ を求めよ．

問題の設定が大的中！ また，点列の極限を求める計算方法も大的中！

4. n を自然数とする。n 以下の自然数のうち，n と共通な素因数がちょうど 1 つとなるものの個数を $E(n)$ と表すこととする。

例えば，12 以下の自然数で 12 と共通な素因数がちょうど 1 つとなるものは 2，3，4，8，9，10 の 6 個であるから，$E(12) = 6$ となる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $E(2025)$ を考える。2025 以下の自然数のうち 3 の倍数は $\boxed{\text{ユヨラ}}$ 個，5 の倍数は $\boxed{\text{リルレ}}$ 個，15 の倍数は $\boxed{\text{ロワヲ}}$ 個あり，$2025 = 3^4 \cdot 5^2$ と表せることから，$E(2025) = \boxed{\text{ンあい}}$ となる。

(2) p を奇数の素数とし，a，b を自然数とする。

$n = 2^a p^b$ とすると，n 以下の自然数のうち 2 の倍数は $2^{\boxed{う}}p^{\boxed{え}}$ 個，p の倍数は $2^{\boxed{お}}p^{\boxed{か}}$ 個，$2p$ の倍数は $2^{\boxed{き}}p^{\boxed{く}}$ 個あるから，

$$E(n) = 2^{\boxed{う}}p^{\boxed{え}} + 2^{\boxed{お}}p^{\boxed{か}} - 2 \cdot 2^{\boxed{き}}p^{\boxed{く}}$$

となる。したがって，$\dfrac{E(n)}{n}$ は p の値によらず，一定値 $\dfrac{\boxed{け}}{\boxed{こ}}$ である。

ただし，$\boxed{う}$〜$\boxed{く}$ は次の選択肢から適当なものを選んで番号を答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

① $a-1$　② a　③ $a+1$　④ $b-1$　⑤ b　⑥ $b+1$

(3) q，r を 2 つの異なる奇数の素数とし，c，d を自然数とする。

$n = q^c r^d$ とするとき，$\dfrac{E(n)}{n}$ のとりうる値のうち 4 番目に大きい値は $\dfrac{\boxed{さし}}{\boxed{すせ}}$ である。

解答

解答記号	正解
ユヨラ	675
リルレ	405
ロワヲ	135
ンあい	810
う，え	①，⑤
お，か	②，④
き，く	①，④
$\dfrac{け}{こ}$	$\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{さし}{すせ}$	$\dfrac{14}{39}$

解説

(1) 1 から 2025 までの自然数の中で，自然数 k の倍数の個数を $N_1(k)$ と表すことにする．2025 以下の自然数のうち，

$$3 \text{ の倍数の個数は } N_1(3) = \frac{3^4 \cdot 5^2}{3} = \mathbf{675}$$

$$5 \text{ の倍数の個数は } N_1(5) = \frac{3^4 \cdot 5^2}{5} = \mathbf{405}$$

$$15 \text{ の倍数の個数は } N_1(15) = \frac{3^4 \cdot 5^2}{15} = \mathbf{135}$$

である．$E(2025)$ は，1 から 2025 までの自然数のうち，3 と 5 のいずれか一方のみを因数にもつものの個数であり，

「3 と 5 の両方を因数にもつ」 $\Longleftrightarrow$ 「15 の倍数である」

であるから

$$E(2025)=\{N_1(3)-N_1(15)\}+\{N_1(5)-N_1(15)\}=675+405-135\times 2=\mathbf{810}$$

である．

(2)　1 から $n=2^ap^b$ までの自然数の中で，自然数 k の倍数の個数を $N_2(k)$ と表すことにする．$n=2^ap^b$ 以下の自然数のうち，

$$\begin{aligned}
&2 \text{ の倍数の個数は } N_2(2)=\frac{2^ap^b}{2}=2^{\boldsymbol{a-1}}p^{\boldsymbol{b}}\\
&p \text{ の倍数の個数は } N_2(p)=\frac{2^ap^b}{p}=2^{\boldsymbol{a}}p^{\boldsymbol{b-1}}\\
&2p \text{ の倍数の個数は } N_2(2p)=\frac{2^ap^b}{2p}=2^{\boldsymbol{a-1}}p^{\boldsymbol{b-1}}
\end{aligned}$$

したがって，(1) と同様に考えて

$$E(n)=\{N_2(2)-N_2(2p)\}+\{N_2(p)-N_2(2p)\}=2^{a-1}p^b+2^ap^{b-1}-2\cdot 2^{a-1}p^{b-1}$$

である．これを $n=2^ap^b$ で割ると

$$\frac{E(n)}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

と一定になる．

(3)　(2) と同様に考えると，

$$E(n)=q^{c-1}r^d+q^cr^{d-1}-2\cdot q^{c-1}r^{d-1}$$

であるから，これを $n=q^cr^d$ で割ると

$$\begin{aligned}
\frac{E(n)}{n}&=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{2}{qr}\\
&=\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

となる．したがって，q，r のうちいずれか一方を固定して他方をより大きな素数に置き換えると，$\dfrac{E(n)}{n}$ の値はより小さな値になる．与えられた q，r の値に対する $\dfrac{E(n)}{n}$ の値を $E_{q,r}$ とする．$\dfrac{E(n)}{n}$ は q，r の対称式なので，$q<r$ としても一般性を失わない．$\dfrac{E(n)}{n}$ の最大値は $E_{3,5}$ であり，

$$\begin{aligned}
&E_{3,5}>E_{3,7}>E_{3,11}>E_{3,13}\\
&E_{3,7}>E_{5,7}
\end{aligned}$$

という大小関係となる．したがって 2 番目に大きい値は $E_{3,7}$ である．また，

$$E_{3,11}=\frac{4}{11}\quad>\quad E_{3,13}=\frac{14}{39}\quad>\quad E_{5,7}=\frac{2}{7}$$

であり，上の値以外の $E_{q,r}$ はすべて $E_{3,13}$ と $E_{5,7}$ のいずれか一方よりは小さいことから，4 番目に大きい値は $\boldsymbol{\dfrac{14}{39}}$ である．

5. $f(x)=x^3-2x$ とする。

(1) $p \fallingdotseq 0$ のときは，曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 l が C と再び交わる点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする。ただし $p=0$ のときは $\mathrm{Q}=\mathrm{P}$ とする。$p=0$ のときを含めて $q=-\boxed{\text{そ}}\,p$ となる。PQ を $t:(1-t)$ に分ける点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，

$$x=(1-t)p+tq,\quad y=(1-t)f(p)+tf(q)$$

が成り立つ。$0 \leqq t \leqq 1$ のときは内分，$t<0$ または $t>1$ のときは外分である。

t を定数として p を実数全体で動かしたとき，R は直線または曲線を描き，

$$t=\frac{\boxed{\text{た}}}{\boxed{\text{ち}}}\ \text{のときは直線}\ x=\boxed{\text{つ}}\ \text{を描く。}$$

$$t=\frac{\boxed{\text{て}}}{\boxed{\text{と}}}\ \text{のときは直線}\ y=-\boxed{\text{な}}\,x\ \text{を描く。}$$

$$\text{これら以外のときは}\ y=ax^3-\boxed{\text{に}}\,x\cdots\cdots Ⓐ$$

の形の 3 次関数のグラフを描く。

(2) $g(t)=\dfrac{1-9t}{(1-3t)^3}$ とする。$g'(t)=-\dfrac{\boxed{\text{ぬね}}\,t}{(1-3t)^4}$ である。

(3) (1) の曲線 Ⓐ を与えるような実数 t が 3 つ存在するのは a が $\boxed{\text{の}}<a<\boxed{\text{は}}$ のときである。

解答

解答記号	正解
$-$そ p	$-2p$
$\dfrac{\text{た}}{\text{ち}}$	$\dfrac{1}{3}$
$x=$ つ	$x=0$
$\dfrac{\text{て}}{\text{と}}$	$\dfrac{1}{9}$
$y=-$な x	$y=-2x$
$y=ax^3-$に x	$y=ax^3-2x$
$-\dfrac{\text{ぬね}\ t}{(1-3t)^4}$	$-\dfrac{54t}{(1-3t)^4}$
の $<a<$ は	$0<a<1$

解説

(1) $y=f(x)$ の $(p,\ f(p))$ における接線は，

$$\begin{aligned} y&=(3p^2-2)(x-p)+p^3-2p \\ &=(3p^2-2)x-2p^3 \end{aligned}$$

となるので，これを $y=f(x)$ と連立すると，

$$
\begin{aligned}
& x^3-2x=(3p^2-2)x-2p^3 \\
\iff\ & x^3-3p^2x+2p^3=0 \\
\iff\ & (x-p)^2(x+2p)=0
\end{aligned}
$$

となるので，$q=\mathbf{-2}p$ である．さらに，

$$
\begin{aligned}
x &= (1-t)p+tq \\
&= (1-t)p+t(-2p) \\
&= (1-3t)p \\
y &= (1-t)f(p)+tf(q) \\
&= (1-t)(p^3-2p)+t(-8p^3+4p) \\
&= (1-9t)p^3+(6t-2)p
\end{aligned}
$$

となるので，$t=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ のとき，R$(0,\ -2p^3)$ となり，この軌跡は直線 $x=\mathbf{0}$ である．

$t\fallingdotseq\dfrac{1}{3}$ のとき，$p=\dfrac{x}{1-3t}$ より，

$$
\begin{aligned}
y &= (1-9t)\left(\frac{x}{1-3t}\right)^3+(6t-2)\left(\frac{x}{1-3t}\right) \\
&= \frac{1-9t}{(1-3t)^3}x^3-2x \quad \cdots\cdots ⓐ
\end{aligned}
$$

となるので，$t=\dfrac{1}{9}$ のとき，R の軌跡は直線 $y=\mathbf{-2}x$ であり，$t\fallingdotseq\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}$ のとき，R の軌跡は，ある 0 でない定数 a を用いて，$y=ax^3\mathbf{-2}x$ と表すことができる．

$\boxed{\text{別解}}$

接線を $y=mx+n$ とすると，方程式 $x^3-2x=mx+n$ の解と係数の関係により $p+p+q=0$ が成り立つ．よって $q=\mathbf{-2}p$ である．

(2)

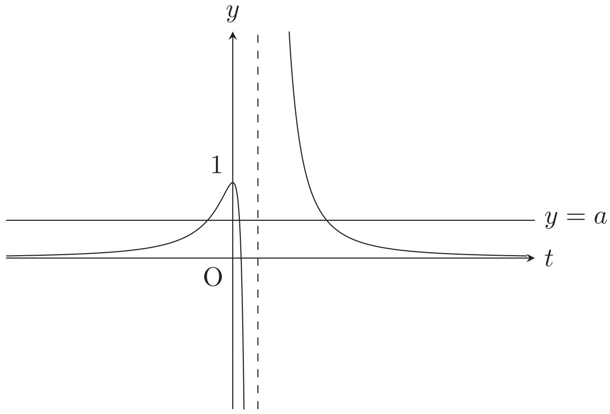
$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{-9(1-3t)^3-(1-9t)\cdot 3(1-3t)^2\cdot(-3)}{(1-3t)^6} \\
&= \frac{-9(1-3t)+9(1-9t)}{(1-3t)^4} \\
&= \frac{\mathbf{-54}t}{(1-3t)^4}
\end{aligned}
$$

(3)　R の軌跡が $y=ax^3-2x$ となる t を求める方程式は，ⓐより，

$$
\frac{1-9t}{(1-3t)^3}=a \quad \cdots\cdots ⓑ
$$

となる．$g(t)=\dfrac{1-9t}{(1-3t)^3}$ の増減表，グラフは以下の通りである．

t	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\left(\dfrac{1}{3}\right)$	$\cdots$	(∞)
$g'(t)$		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	
$g(t)$	(0)	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty \vert \infty$	$\searrow$	(0)



グラフより，ⓑの解が $t = \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$ 以外の 3 個となる a の条件は，$\mathbf{0} < a < \mathbf{1}$ である．

講評

1.［2 次方程式］（難）

2 次方程式に関する問題だったが，発想の転換が必要な場面もあり完答するのは難しかっただろう．

2.［平面図形，極限］（標準）

二等辺三角形の線分比と極限の問題．(1) はメネラウスの定理で線分比を求め，ベクトルを利用して OP の長さを求めればよい．(2) は，(1) が正解できれば基本的な極限計算であるため確実に得点したい．(1) の OP が求められるかどうかがポイントとなるが，この大問は完答を狙いたい．

3.［複素数平面，極限］（標準～難）

与えられた点列について議論する問題であった．複素数平面を利用して考えるのがよいだろう．(1)，(2) はやや計算が繁雑だが，非常に典型的なので何とか正解したい．(3) は，厳密に解を求めるのはなかなか大変だが，答が $n=2$ なので見つけることができた受験生もいるだろう．

4.［整数］（やや難）

自然数 n と共通な素因数をもつ n 以下の自然数について考える問題であった．題意がややとりにくいが，そこを乗り切れば (1)，(2) は難しくない．(3) は慎重に調べればよいが，制限時間内に正解に達するのは難しいだろう．

5.［微分法，軌跡］（やや難）

3 次関数の接線，軌跡，解の個数の融合問題．(1) の後半で戸惑った受験生が多いかも知れないが，問題の意味をくみ取ることができ，計算を丁寧に行えば，完答も狙える．

ここ数年は，同じ年度の前期試験より若干難易度が下がる場合が多かったが，今回は 2025 年度前期と同程度の難易度であった．計算が重かったり題意がつかみにくい問題が含まれ，高得点をとるのは難しいだろう．大問 2 を完答し，それ以外の大問で部分点をかき集めたい．目標は 55%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ