解答速報

東海大学医学部（1日目） 数学

2025年 2月 2日実施

1

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(3k+3)}=\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 関数 $f(x)=\left(\dfrac{4}{2^x}\right)^x$ は，$x=\boxed{\text{イ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる．

(3) $(x+1)^{26}$ の展開式における x^2 の項の係数は $\boxed{\text{エ}}$ である． 26^{26} を 625 で割ったときの余りは $\boxed{\text{オ}}$ である．

(4) さいころを 3 回投げ，出た目を順に $x,\ y,\ z$ とする．このとき，$x\leqq y\leqq z$ となる場合は $\boxed{\text{カ}}$ 通りである．

(5) 実部が 1 であり，虚部が正である複素数 z において，z^3 の虚部 y がとりうる値は $y\leqq\boxed{\text{キ}}$ である．

(6) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$ のとき，$\cos(2\alpha+\beta)=\boxed{\text{ク}}$ である．

(7) $0<a<4$ とする．直線 $l:y=ax$ と放物線 $C:y=4x-x^2$ の共有点のうち，x 座標が正である点を P とおく．このとき P の x 座標は a を用いて表すと $\boxed{\text{ケ}}$ である．また，C と l により囲まれた部分の面積と，l と x 軸と直線 $x=\boxed{\text{ケ}}$ により囲まれた部分の面積の比が $2:1$ になるのは，$a=\boxed{\text{コ}}$ のときである．

解答

ア．$\dfrac{n}{9(n+1)}$　イ．1　ウ．2　エ．325　オ．26　カ．56　キ．2　ク．$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　ケ．$4-a$　コ．$\dfrac{4}{7}$

解説

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(3k+3)}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{9(n+1)}}$$

(2)

$$f(x)=\left(\frac{2^2}{2^x}\right)^x=(2^{2-x})^x=2^{2x-x^2}=2^{-(x-1)^2+1}$$

$-(x-1)^2+1$ が最大のとき $f(x)$ も最大となるので，$f(x)$ は $x=\mathbf{1}$ のとき最大値 $\mathbf{2}$ をとる．

(3) $(x+1)^{26}$ の展開式における x^2 の項の係数は，${}_{26}\mathrm{C}_2(={}_{26}\mathrm{C}_{24})=\mathbf{325}$ である．

一方，

$$(x+1)^{26}={}_{26}\mathrm{C}_0\,x^{26}+{}_{26}\mathrm{C}_1\,x^{25}+{}_{26}\mathrm{C}_2\,x^{24}+\cdots\cdots+{}_{26}\mathrm{C}_{24}\,x^2+{}_{26}\mathrm{C}_{25}\,x+{}_{26}\mathrm{C}_{26}$$
$$=x^2\left({}_{26}\mathrm{C}_0\,x^{24}+{}_{26}\mathrm{C}_1\,x^{23}+{}_{26}\mathrm{C}_2\,x^{22}+\cdots\cdots+{}_{26}\mathrm{C}_{24}\right)+{}_{26}\mathrm{C}_{25}\,x+{}_{26}\mathrm{C}_{26}$$

と表される．この式に $x=25$ を代入する．$25^2=625$ を法とする合同式を用いると

$$\begin{aligned}(25+1)^{26} &= 25^2\left({}_{26}\mathrm{C}_0\,25^{24}+{}_{26}\mathrm{C}_1\,25^{23}+{}_{26}\mathrm{C}_2\,25^{22}+\cdots\cdots+{}_{26}\mathrm{C}_{24}\right)+{}_{26}\mathrm{C}_{25}\,25+{}_{26}\mathrm{C}_{26}\\ &\equiv (25+1)25+1\\ &\equiv 25+1=26\end{aligned}$$

となるので，26^{26} を 625 で割ったときの余りは **26** である．

(4)　x, y, z は 1 以上 6 以下の自然数であるので，

$$1 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 6 \iff 1 \leqq x < y+1 < z+2 \leqq 8$$

$y+1=Y$, $z+2=Z$ とおくと $1 \leqq x < Y < Z \leqq 8$ であり，$x \leqq y \leqq z$ となる場合の数は 1 から 8 の自然数の中で異なる 3 数を選ぶ組合せに等しい．したがって ${}_8\mathrm{C}_3=\mathbf{56}$ 通り．

(5)　$z=1+bi$ とおくと（ただし b は正の実数），

$$z^3=(1+bi)^3=(1-3b^2)+(3b-b^3)i$$

b	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(b)$		$+$	0	$-$
$f(b)$	(0)	$\nearrow$	2	$\searrow$

となるので，$y=3b-b^3$ である．$f(b)=3b-b^3$ とすると $f'(b)=3-3b^2=3(1-b)(1+b)$ であり，$f(b)$ の増減は右のようになる．したがって，$y \leqq \mathbf{2}$ である．

(6)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\tan\alpha=2$ より，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となり，

$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$, $\tan\beta=3$ より，$\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\beta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ となる．

よって

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha+\beta) &= \cos 2\alpha\cos\beta-\sin 2\alpha\sin\beta\\ &= (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\\ &= \left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)-2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{10}}{10}}\end{aligned}$$

(7)　$y=ax$ と $y=4x-x^2$ を連立すると

$$ax=4x-x^2 \iff x\{x-(4-a)\}=0$$

$x>0$ より，P の x 座標は $\boldsymbol{4-a}$ である．

次に C と l により囲まれた部分の面積を S_1，l と x 軸と直線 $x=4-a$ により囲まれた部分の面積を S_2 とすると，

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_0^{4-a}\{(4x-x^2)-ax\}dx=-\int_0^{4-a}x\{x-(4-a)\}dx=\frac{1}{6}(4-a)^3\\ S_2 &= \frac{1}{2}\cdot(4-a)\cdot a(4-a)=\frac{1}{2}a(4-a)^2\end{aligned}$$

$S_1:S_2=2:1$ より

$$S_1=2S_2 \iff \frac{1}{6}(4-a)^3=a(4-a)^2 \iff (4-a)^2(4-7a)=0$$

$0<a<4$ より，$a=\boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$ である．

2 四面体 OPQR において

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}=2,\ \mathrm{QR}=2\sqrt{3},\ \mathrm{OR}=4,\ \mathrm{PR}=3\sqrt{2}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とおく．

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=$ $\boxed{\text{ア}}$，$\vec{q}\cdot\vec{r}=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $\cos\angle\mathrm{POR}=$ $\boxed{\text{ウ}}$，$\vec{p}\cdot\vec{r}=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 3 点 O，P，Q を通る平面を α とし，点 R から α へ下ろした垂線と α の交点を H とする．x, y を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{p}+y\vec{q}$ とおく．$\vec{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}$ を x, y を用いて表すと $\vec{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}=$ $\boxed{\text{オ}}$ $x+2y-1$ であり，$\vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}$ を x, y を用いて表すと $\vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}=$ $\boxed{\text{カ}}$ $x+4y-4$ であるから，$x=$ $\boxed{\text{キ}}$，$y=$ $\boxed{\text{ク}}$ となる．

(4) 直線 PH と直線 OQ の交点を L とすると，OL : LQ $=$ $\boxed{\text{ケ}}$: 1 である．

解答

ア．2　イ．4　ウ．$\dfrac{1}{8}$　エ．1　オ．4　カ．2　キ．$-\dfrac{1}{3}$　ク．$\dfrac{7}{6}$　ケ．7

解説

(1) 三角形 OPQ は正三角形であり，三角形 OQR は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形であるので，内積はそれぞれ以下のようになる．

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=\mathbf{2}$$

$$\vec{q}\cdot\vec{r}=2\cdot4\cdot\cos60^\circ=\mathbf{4}$$

(2) 余弦定理から

$$\cos\angle\mathrm{POR}=\frac{4+16-18}{2\cdot2\cdot4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

であるので，

$$\vec{p}\cdot\vec{r}=2\cdot4\cdot\frac{1}{8}=\mathbf{1}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{p}+y\vec{q}$ であるので $\overrightarrow{\mathrm{RH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r}$ である．

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}&=\vec{p}\cdot(x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r})\\&=x|\vec{p}|^2+y\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{p}\cdot\vec{r}\\&=\mathbf{4}x+2y-1=0\cdots①\\\vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}&=\vec{q}\cdot(x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r})\\&=x\vec{p}\cdot\vec{q}+y|\vec{q}|^2-\vec{q}\cdot\vec{r}\\&=\mathbf{2}x+4y-4=0\cdots②\end{aligned}$$

①，②から $x=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$，$y=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$ を得る．

(4)

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{7}{6}\vec{q}=-\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{4}{3}\left(\frac{7}{8}\vec{q}\right)$$

において，$\dfrac{7}{8}\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$$

と表すことができるので，H は線分 PZ を $4:1$ に外分する点であることがわかる．
したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{7}{8}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であることが分かり，$\mathrm{OL}:\mathrm{LQ}=\mathbf{7}:1$.

別解

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{7}{6}\vec{q}=\frac{5}{6}\cdot\frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+7\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{5}$$

と変形できるので，線分 PQ を $7:2$ に外分する点を S とすると，点 H は線分 OS を $5:1$ に内分する点である．
したがって，メネラウスの定理から

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{OL}}\cdot\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{QP}}\cdot\frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{SH}}=1\\ \iff&\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{OL}}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{1}=1\\ \iff&\mathrm{OL}:\mathrm{LQ}=\mathbf{7}:1\end{aligned}$$

別解

L は直線 OQ 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=k\vec{q}$$

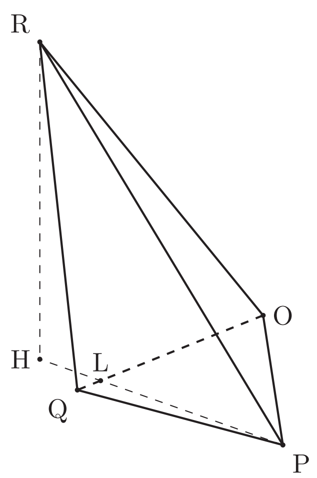
また，L は直線 PH 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=(1-t)\vec{p}+t\left(-\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{7}{6}\vec{q}\right)=\left(1-\frac{4}{3}t\right)\vec{p}+\frac{7}{6}t\vec{q}$$

$\vec{p}$，$\vec{q}$ は一次独立であるので，

$$\begin{cases}1-\dfrac{4}{3}t=0\\ \dfrac{7}{6}t=k\end{cases}$$

より，$t=\dfrac{3}{4}$，$k=\dfrac{7}{8}$ を得る．したがって，$\mathrm{OL}:\mathrm{LQ}=\mathbf{7}:1$.



$\boxed{3}$ xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(1,\ \sqrt{3})$ をとり，$\triangle$AOB を考える．

(1) $\angle$AOB を二等分する直線 l の方程式は $y=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $\triangle$AOB に内接する円 C の半径は $\boxed{\text{イ}}$ であり，中心の x 座標は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) l と C の共有点であり，O との距離が小さい方の点を D とする．点 D の x 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) 辺 OA，OB と C に接する円 C' の半径は $\boxed{\text{オ}}$ であり，中心の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(5) OA と C，C' で囲まれた部分の面積は，C' で囲まれた部分の面積の $\left(\boxed{\text{キ}}\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}-\boxed{\text{ク}}\right)$ 倍である．ただし $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ には有理数が入るものとする．

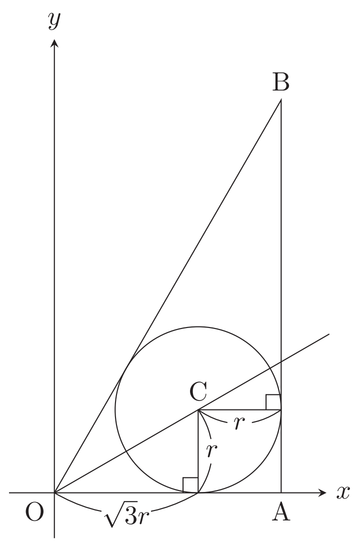
$\boxed{\text{解答}}$

ア．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ イ．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ ウ．$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ エ．$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ オ．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{6}$ カ．$\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ キ．4
ク．$\dfrac{11}{6}$

$\boxed{\text{解説}}$

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるので，直線 l と x 軸のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ である．

したがって，直線 l の方程式は $y=\left(\tan\dfrac{\pi}{6}\right)x=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}x}$.



(2) 円 C の半径を r とすると，図より

$$\mathrm{OA}=\sqrt{3}r+r=1 \iff r=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

三角形の面積から

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}r(3+\sqrt{3}) \iff r=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \qquad \text{(別解終)}$$

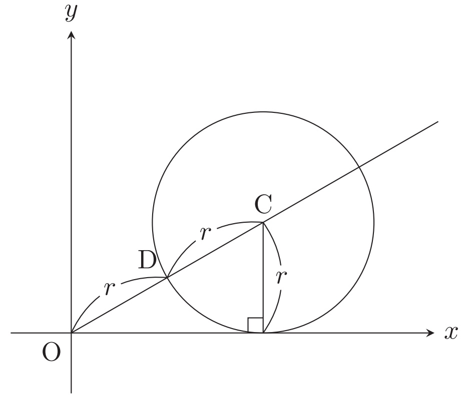
また，円 C の中心の x 座標は

$$x=\sqrt{3}r=\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$$

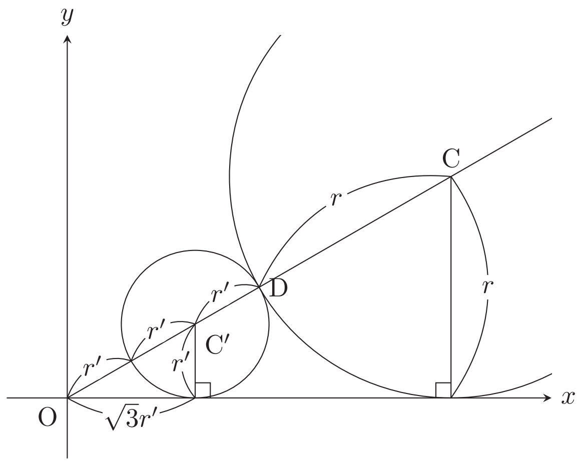
である．

(3) 円 C の中心を C とすると，$\mathrm{OD}=\mathrm{OC}-r=r$ であるので，点 D は線分 OC の中点である．したがって，点 D の x 座標は

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}}{4}}$$



(4)　円 C' の半径を r' とすると，図より

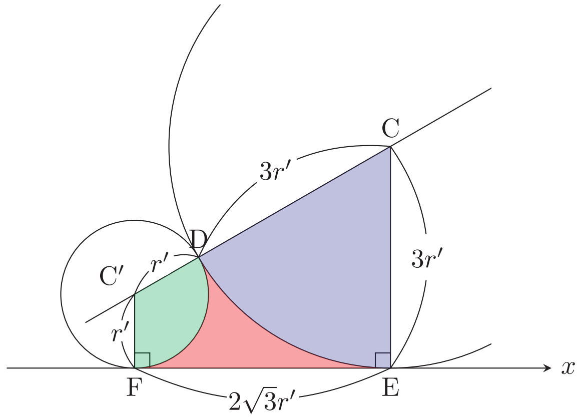


$$(r+r'):(r-r')=2:1 \iff r'=\frac{1}{3}r$$

が成り立つので，$r'=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-1}{6}}$ である．

また，円 C' の中心を C' とすると，点 C' の x 座標は $x=\sqrt{3}r'=\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}$ である．

(5)　OA と C，C' で囲まれた部分は図の赤色部分である．この面積を S とすると，



$S=$(台形 $\mathrm{CC'FE}$)$-$(扇形 CDE)$-$(扇形 $\mathrm{C'DF}$)

で求まる．$r=3r'$ であることと，

$$\mathrm{EF}=\frac{\sqrt{3}}{2}(r+r')=2\sqrt{3}r'$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}(r'+3r')\cdot 2\sqrt{3}r'-\frac{1}{2}(3r')^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}r'^2\cdot\frac{2\pi}{3}\\
&=4\sqrt{3}r'^2-\frac{11}{6}\pi r'^2\\
&=\left(\frac{4\sqrt{3}}{\pi}-\frac{11}{6}\right)\pi r'^2
\end{aligned}$$

となるので，$\left(\boldsymbol{4}\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}-\boldsymbol{\dfrac{11}{6}}\right)$ 倍である．

講評

1［小問集合］((1) 易 (2) やや易 (3) 標準 (4) やや易 (5) やや易 (6) 易 (7) やや易)

(3) の後半はやや難しかったが，典型的な問題が並んでおり，できればほぼ完答まで持っていきたい．

2［空間ベクトル］(やや易)

四面体において，平面に下ろした垂線や，2 直線の交点について考える問題．誘導が親切すぎるくらい丁寧で，典型題であるので是非完答をねらいたい．

3［平面図形，図形と方程式］(標準)

座標平面上において，三角形の内接円や，接する 2 つの円について考える問題．最後の (5) の計算を要領よくやれたかどうかで差がつきそうだが，何とか完答をねらいたい．

昨年度から，出題範囲に数学Ⅲが含まれなくなり，それ以前より問題が易しくなったのだが，今回のセットはさらに易しくなっている．ただし分量はやや多いので，処理力が得点を大きく左右するだろう．目標は 80%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ