解答速報

東海大学医学部（2日目）　数学

2025年 2月 3日実施

1 (1)　実数 a, b が $a^2 > 4b$ を満たすとする．放物線 $y = -x^2$ と直線 $y = ax + b$ は 2 点で交わる．その交点を P, Q とおく．このとき，線分 PQ の長さは a, b を用いて表すと $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2)　実数 x が $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすとする．関数 $\displaystyle\int_0^2 \{|2(t-x)|+2\}dt$ は $x = \boxed{\text{イ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる．

(3)　$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 27$ のとき関数 $y = (\log_3 x)^2 - \log_9 x^6 - 3$ の最大値は $\boxed{\text{エ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(4)　正の奇数の列を，次のような群に分ける．ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする．

$$1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ 15,\ 17,\ 19 \mid 21,\ \cdots\cdots$$

奇数 2025 が入る群は第 $\boxed{\text{カ}}$ 群である．

(5)　アルファベット K, A, N, A, G, A, W, A の 8 文字をすべて用いて順列を作る．どの A も隣り合わない，異なる順列の総数は $\boxed{\text{キ}}$ 通りある．

(6)　点 (3, 5) を中心とする円 C_1 と点 (9, 13) を中心とする円 C_2 が異なる 2 点で交わっており，円 C_3 は C_1 と C_2 の両方に内接する円のうち，最も面積が大きい円であるとする．C_1 の半径が 8，C_3 の半径が 2 であるとき，C_2 の半径は $\boxed{\text{ク}}$ である．

解答

ア．$\sqrt{(a^2+1)(a^2-4b)}$　イ．1　ウ．6　エ．1　オ．$-\dfrac{21}{4}$　カ．45　キ．120　ク．6

解説

(1)　$y = -x^2$ と $y = ax + b$ の共有点の x 座標は $x^2 + ax + b = 0$ を解くことにより求まる．この方程式の判別式を D とすると，$D = a^2 - 4b > 0$ であることからたしかに異なる 2 つの共有点をもつことがわかる．このときの解を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると，解と係数の関係により

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

を得る．ここで，$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{a^2 - 4b}$ であり，直線の傾きが a であることから，

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{a^2+1}(\beta - \alpha) = \boldsymbol{\sqrt{(a^2+1)(a^2-4b)}}$$

(2)　$|2(t-x)|$ は

$$\begin{cases} t < x \text{ のとき } 2(-t+x) = -2t + 2x \\ t \geqq x \text{ のとき } 2(x-t) = 2x - 2t \end{cases}$$

であるので，$0 \leqq x \leqq 2$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \{|2(t-x)|+2\}dt &= \int_0^x (-2t+2x+2)dt + \int_x^2 (2t-2x+2)dt \\
&= \Big[-t^2+(2x+2)t\Big]_0^x + \Big[t^2-(2x-2)t\Big]_x^2 \\
&= -x^2+2x^2+2x+4-4x+4-x^2+2x^2-2x \\
&= 2x^2-4x+8 \\
&= 2(x-1)^2+6
\end{aligned}$$

である．したがって，$x = \mathbf{1}$ のとき最小値 $\mathbf{6}$ をとる．

(3)　$\log_3 x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 27 \iff -1 \leqq t \leqq 3$ である．また，$\log_9 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} = \dfrac{t}{2}$ であるので，

$$\begin{aligned}
y &= (\log_3 x)^2 - \log_9 x^6 - 3 \\
&= t^2 - 6\cdot\frac{t}{2} - 3 \\
&= t^2 - 3t - 3 \\
&= \left(t-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}
\end{aligned}$$

となる．したがって，$t=-1\left(x=\dfrac{1}{3}\right)$ のとき最大値 $\mathbf{1}$．$t=\dfrac{3}{2}\left(x=3\sqrt{3}\right)$ のとき最小値 $\mathbf{-\dfrac{21}{4}}$.

(4)　第 n 群には n 個の数が入るので，第 n 群の末項は，最初から数えて $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 番目である．2025 は最初から数えて 1013 番目の奇数であるので，これが第 n 群にあるとすると，

$$\frac{n(n-1)}{2} < 1013 \leqq \frac{n(n+1)}{2}$$

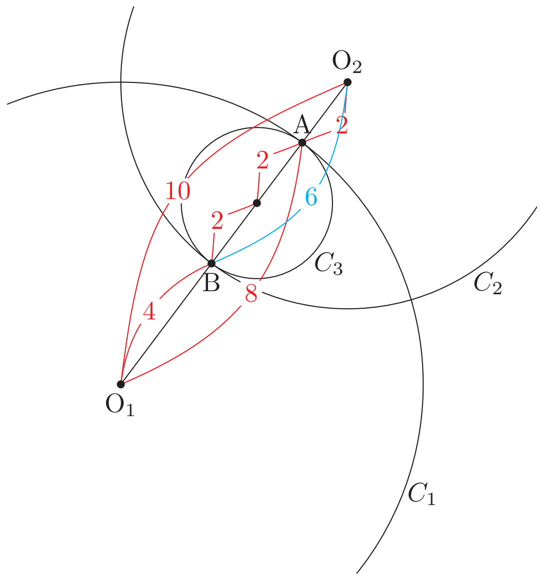
これを満たす自然数 n は $n=45$ である．よって 2025 が入る群は第 **45** 群である．

(5)　先に A 以外の K，N，G，W の 4 文字を並べておき，その両端およびすき間の計 5 箇所のうち 4 箇所に A を 1 つずつ入れていけばよい．したがって求める順列の総数は $4! \times {}_5\mathrm{C}_4 = \mathbf{120}$ 通りである．

(6)　C_1 と C_2 の中心をそれぞれ O_1，O_2 とすると，

$$\mathrm{O_1O_2} = \sqrt{(9-3)^2+(13-5)^2} = 10$$

　線分 $\mathrm{O_1O_2}$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ A，B とすると，C_3 は線分 AB を直径とする円である．
$\mathrm{AB}=4$ より，$\mathrm{BO_1} = \mathrm{AO_1} - \mathrm{AB} = 8-4 = 4$.
$\mathrm{BO_2} = \mathrm{O_1O_2} - \mathrm{BO_1} = 10-4 = 6$ より，C_2 の半径は $\mathbf{6}$ である．



$\boxed{2}$ 一辺の長さが 1 の正八面体 H を考える．

(1) H の表面積は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) H の各頂点を通る球の半径は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) H の体積は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4) H の一辺を共有する 2 つの H の面のなす鈍角を α とする．このとき，$\cos\alpha = \boxed{\text{エ}}$ である．

(5) H の各面と接する球の体積は $\boxed{\text{オ}}$ である．

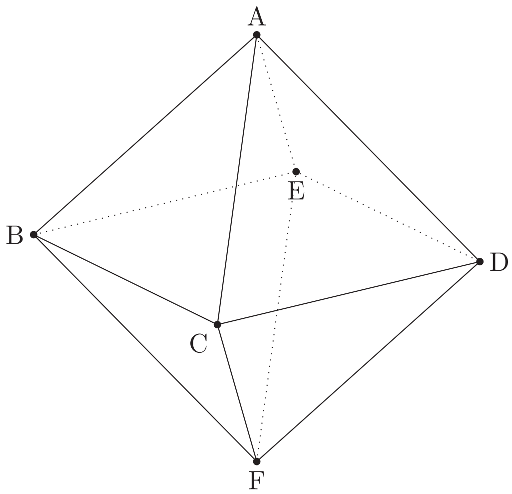
(6) H の一つの面 T と平行な平面 P で H を切ったとき，断面を S とする．P の位置によらず S の周の長さは $\boxed{\text{カ}}$ であるが，S の面積は P の位置によって変化し，その最大値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

ア．$2\sqrt{3}$　イ．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　ウ．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　エ．$-\dfrac{1}{3}$　オ．$\dfrac{\sqrt{6}}{27}\pi$　カ．3　キ．$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{\text{解説}}$

下図のように正八面体 H の各頂点を A, B, C, D, E, F とする．

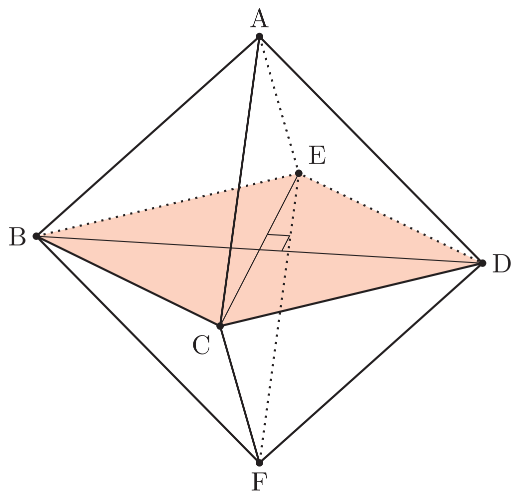


(1) 一辺の長さが 1 の正八面体の各面は一辺の長さが 1 の正三角形であるから，H の表面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = \mathbf{2\sqrt{3}}$$

(2) 四角形 BCDE は一辺の長さが 1 の正方形であるから，H の各頂点を通る球の中心は，正方形の対角線の交点であり，線分 BD，CE はそれぞれ球の直径となっている．よって，球の半径は

$$\frac{\mathrm{BD}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$



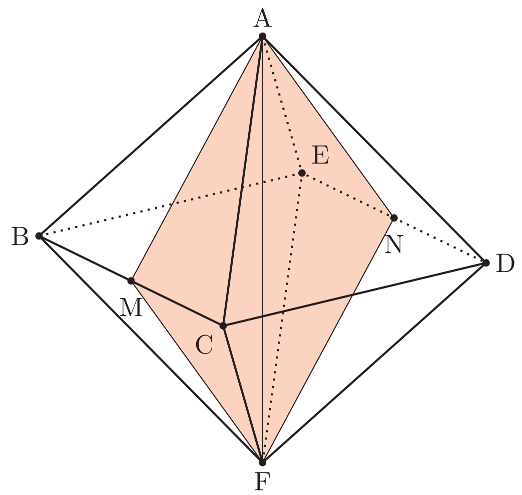
(3) H の体積は四角錐 ABCDE の体積の 2 倍である．よって，H の体積を V_1 とすると，四角錐 ABCDE の高

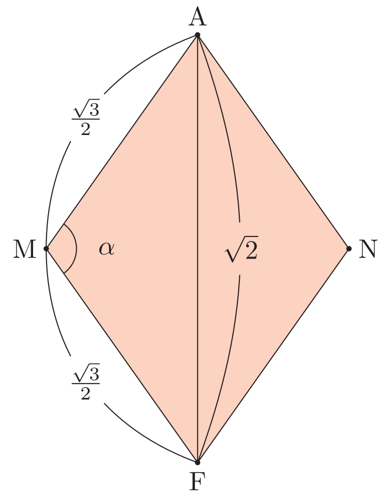
さは (2) で求めた球の半径と等しいので,

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

(4)　辺 BC の中点を M とすると，題意の鈍角 α は，線分 AM と線分 FM のなす角である．よって，△AMF において余弦定理より，

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$$





(5)　球の半径を r とすると，(1)(3) を用いることにより，正八面体の体積について

$$\frac{1}{3}\times(\text{表面積})\times r = \frac{\sqrt{2}}{3} \iff \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot r = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

より $r = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ を得る．したがって，求める球の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{27}\pi}$$

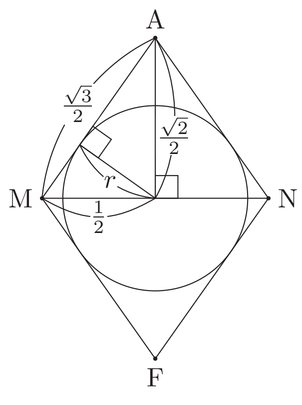
となる．

$\boxed{\text{別解}}$

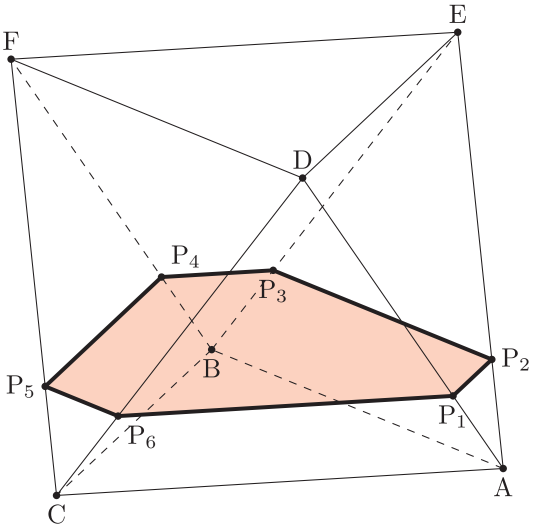
求める球の半径を r とする．相似な三角形の比より

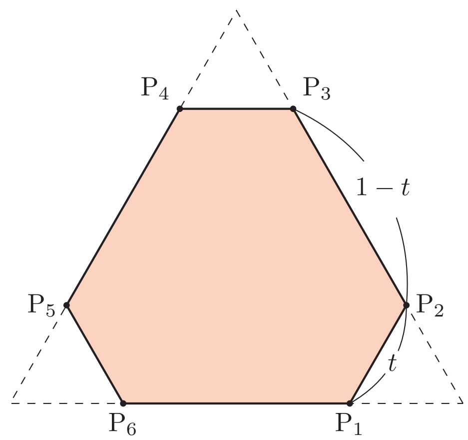
$$\frac{\sqrt{2}}{2} : r = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} \iff r = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(以下略)



(6)　H の一つの面 T と平行な平面 P で H を切ったときの図は下図のようになる．





ここで，断面 S は六角形となり，その頂点を図のように $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5, \mathrm{P}_6$ とする．$\mathrm{AP}_1 = t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ とすると，$\triangle \mathrm{AP}_1\mathrm{P}_2$，$\triangle \mathrm{DP}_1\mathrm{P}_6$ などは正三角形であるから，この六角形の各辺の長さは

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_3\mathrm{P}_4 = \mathrm{P}_5\mathrm{P}_6 = t,\ \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_4\mathrm{P}_5 = \mathrm{P}_6\mathrm{P}_1 = 1-t$$

である．よって，P の位置によらず S の周の長さは

$$3t + 3(1-t) = \mathbf{3}$$

である．次に S の面積を $S(t)$ とする．一辺が $1+t$ の正三角形から，一辺が t の正三角形 3 つを除けばよいので，

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\sqrt{3}}{4}(1+t)^2 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(-2t^2 + 2t + 1) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ より，S の面積の最大値は $t = \dfrac{1}{2}$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$ である．

3 x を実数とし，$f(x)=2x+2$，$g(x)=x^2$ とする．

(1) $-2<f(x)<2$ は，$\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ であるための必要十分条件である．

(2) $-5<x<2$ は，$-2<f(x)<2$ であるための $\boxed{\text{ウ}}$．

$\boxed{\text{ウ}}$ に最も適するものを，次の ①〜④ のうちから選び，数字で答えなさい．

① 必要十分条件である　② 必要条件であるが十分条件ではない

③ 十分条件であるが必要条件ではない　④ 必要条件でも十分条件でもない

(3) a は正の実数とする．命題

$$|x-1|<a \Longrightarrow -3<f(x)-f(1)<5$$

が真となるような a の最大値は $a=\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) b は正の実数とする．命題

$$-3<f(x)-f(1)<5 \Longrightarrow |x-1|<b$$

が真となるような b の最小値は $b=\boxed{\text{オ}}$ である．

(5) $-3<g(x)<2$ は，$\boxed{\text{カ}}<x<\boxed{\text{キ}}$ であるための必要十分条件である．

(6) c は正の実数とする．命題

$$|x-1|<c \Longrightarrow -\frac{1}{2}<g(x)-g(1)<\frac{1}{2}$$

が真となるような c の最大値は $c=\boxed{\text{ク}}$ である．

(7) d は正の実数とする．命題

$$-\frac{1}{2}<g(x)-g(1)<\frac{1}{2} \Longrightarrow |x-1|<d$$

が真となるような d の最小値は $d=\boxed{\text{ケ}}$ である．

解答

ア．-2　イ．0　ウ．②　エ．$\dfrac{3}{2}$　オ．$\dfrac{5}{2}$　カ．$-\sqrt{2}$　キ．$\sqrt{2}$　ク．$\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$　ケ．$\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$

解説

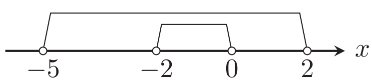
(1)

$$\begin{aligned} & -2<f(x)<2 \\ \Longleftrightarrow\ & -2<2x+2<2 \\ \Longleftrightarrow\ & -4<2x<0 \\ \Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{-2}<x<\boldsymbol{0} \end{aligned}$$

(2)

$$\{x \mid -2<x<0\} \subset \{x \mid -5<x<2\}$$

となっているので（図 1 参照），$-5<x<2$ は $-2<f(x)<2$ であるための必要条件であるが十分条件ではない．したがって **②**．



(図 1)

(3)

$$\begin{aligned} & |x-1|<a \\ \Longleftrightarrow\ & -a<x-1<a \\ \Longleftrightarrow\ & 1-a<x<1+a \end{aligned}$$

であり，

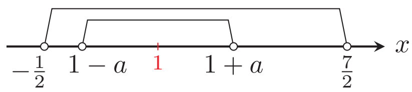
$$
\begin{aligned}
& -3 < f(x) - f(1) < 5 \\
\iff\quad & -3 < 2x - 2 < 5 \\
\iff\quad & -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

である．ここで，

$$\{x \mid 1 - a < x < 1 + a\} \subset \left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}\right\}$$

となるための条件は，

$$-\frac{1}{2} \leqq 1 - a \text{ かつ } 1 + a \leqq \frac{7}{2}$$



（図 2）

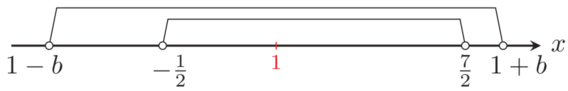
となるので（図 2 参照），$a \leqq \dfrac{3}{2}$ かつ $a \leqq \dfrac{5}{2}$ から $a \leqq \dfrac{3}{2}$ より，a の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ である．

(4)

$$\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}\right\} \subset \{x \mid 1 - b < x < 1 + b\}$$

となるための条件は，

$$1 - b \leqq -\frac{1}{2} \text{ かつ } \frac{7}{2} \leqq 1 + b$$



（図 3）

となるので（図 3 参照），$b \geqq \dfrac{3}{2}$ かつ $b \geqq \dfrac{5}{2}$ から $b \geqq \dfrac{5}{2}$ より，b の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ である．

(5)

$$
\begin{aligned}
& -3 < g(x) < 2 \\
\iff\quad & -3 < x^2 < 2 \\
\iff\quad & \boldsymbol{-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

※ $x^2 > -3$ は常に成立する．

(6)

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} < g(x) - g(1) < \frac{1}{2} \\
\iff\quad & -\frac{1}{2} < x^2 - 1 < \frac{1}{2} \\
\iff\quad & \frac{1}{2} < x^2 < \frac{3}{2} \\
\iff\quad & -\frac{\sqrt{6}}{2} < x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ または } \frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}
$$

である．ここで，

$$\{x \mid 1 - c < x < 1 + c\} \subset \left\{x \,\middle|\, -\frac{\sqrt{6}}{2} < x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ または } \frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$$

となるための条件は，$\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1 < \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ であることを考慮すると，

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq 1 - c \text{ かつ } 1 + c \leqq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

となるので（図 4 参照），$c \leqq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ かつ $c \leqq \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$ から $c \leqq \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$ より，c の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}}$ である．

注釈

$2-\sqrt{2} > 2-1.5 = 0.5$, $\sqrt{6}-2 < 2.5-2 = 0.5$ より $2-\sqrt{2} > \sqrt{6}-2$ である．

（図 4）

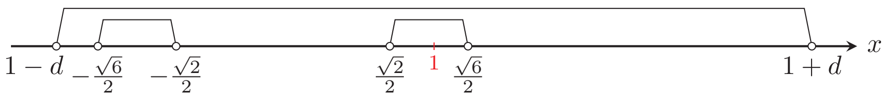
(7)

$$\left\{x \,\middle|\, -\frac{\sqrt{6}}{2} < x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ または } \frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}\right\} \subset \{x \,|\, 1-d < x < 1+d\}$$

となるための条件は，

$$1-d \leqq -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ かつ } \frac{\sqrt{6}}{2} \leqq 1+d$$

となるので（図 5 参照），$d \geqq \dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$ かつ $d \geqq \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$ から $d \geqq \dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$ より，d の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}}$ である．



（図 5）

講評

□1［小問集合］((1) 標準 (2) 標準 (3) やや易 (4) やや易 (5) 易 (6) 標準)

いずれも典型的な問題であり，なるべく完答に近いところまで仕上げたいが，処理に時間がかかった受験生も多いであろう．

□2［空間図形］(標準)

正八面体に関しての諸量を問われた問題であった．最後の切り口はややイメージしづらい．

□3［2 次関数，集合と命題］(標準)

計算処理自体は難しくないが，必要条件や十分条件の包含関係などで混乱した受験生は多かったと思われる．中盤以降は数直線をしっかりかいてよく考えたうえで処理したい．

今年度は 2 日続けて大問で図形の要素が多かった．1 日目に比べるとこの 2 日目の方がやや解きづらい問題構成だった．小問集合で 5 問程度を正解した上で，□2, □3 でどれだけ処理しきれたか，という勝負になりそうである．目標は 70%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ