解答速報

福岡大学医学部　数学

2026年 2月 2日実施

[I]　次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当（がいとう）欄に記入せよ。

(i)　$\cos x = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\cos 3x = \boxed{(1)}$ である。

また，$\sin 2y = \cos 3y \left(0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\sin y = \boxed{(2)}$ である。

(ii)　座標空間の 4 点 A(0, 6, 10)，B(1, 7, 5)，C(−3, 0, 0)，D(0, 3, 0) がある。

2 点 A, B を通る直線と xy 平面の交点の座標は $\boxed{(3)}$ であり，

四面体 ABCD の体積は $\boxed{(4)}$ である。

(iii)　数列 $\{a_n\}$ が $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n = n \cdot (-3)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ を満たしている。

このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{(5)}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{(6)}$ である。

解答

(1) $-\dfrac{71}{125}$　(2) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$　(3) $(2,\ 8,\ 0)$　(4) $\dfrac{15}{2}$　(5) $(1-4n)3^{n-1}$　(6) $\dfrac{(3-4n)3^n - 3}{2}$

解説

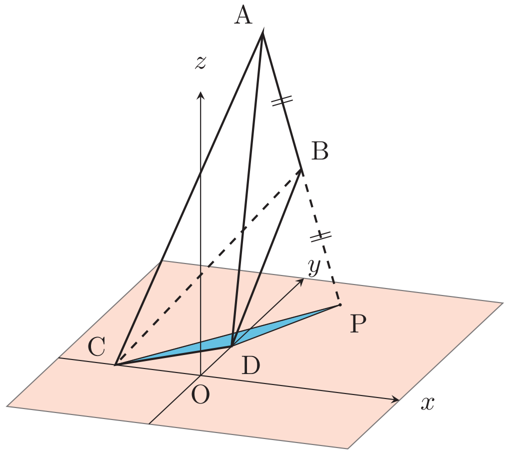
(i)

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ &= 4\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= -\mathbf{\frac{71}{125}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin 2y = \cos 3y \\ \iff\ & 2\sin y\cos y = 4\cos^3 y - 3\cos y \\ \iff\ & \cos y(4\sin^2 y + 2\sin y - 1) = 0\end{aligned}$$

ここで，$0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ であるので $0 < \sin y < 1$，$0 < \cos y < 1$ であることから，$\sin y = \boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.

(ii)　A，B を通る直線上の点 P は媒介変数 t を用いて，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= (0,\ 6,\ 10) + t(1,\ 1,\ -5)\\ &= (t,\ 6+t,\ 10-5t)\end{aligned}$$

と表すことができる．xy 平面 $(z=0)$ との交点は

$$10 - 5t = 0 \iff t = 2$$

であるので，$\mathrm{P}\boldsymbol{(2,\ 8,\ 0)}$ である．

このとき，$t=2$ から B は線分 AP の中点であるとわかるので，四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積は等しい．P，C，D はすべて xy 平面上にあるので，三角形 PCD を底面とみなすと，高さは B の z 座標の絶対値となる．xy 平面において，$\mathrm{P}(2,\ 8)$，$\mathrm{C}(-3,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 3)$ であるので，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (3,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (5,\ 8)$ を得るので，

$$\triangle\mathrm{PCD} = \frac{1}{2}|3\cdot 8 - 3\cdot 5| = \frac{9}{2}$$

したがって求める体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot 5 = \boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$ である．

別解

もちろん外積を用いてもよい．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 1,\ -5)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-3,\ -6,\ -10)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,\ -3,\ -10)$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-40,\ 25,\ -3),\ (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0 - 75 + 30 = -45$$

したがって，$V = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$.

(iii)　$a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n = n\cdot(-3)^n \cdots ①$ とすると，
$n \geqq 2$ のとき $a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-2}a_{n-1} = (n-1)\cdot(-3)^{n-1} \cdots ②$ であるので，①－② から

$$(-1)^{n-1}a_n = n\cdot(-3)^n - (n-1)\cdot(-3)^{n-1} = (1-4n)\cdot(-3)^{n-1}$$

を得る．これは $n=1$ のときも成り立つので，$\boldsymbol{a_n = (1-4n)3^{n-1}}$ である．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - 4\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k-1}$ である．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} = \frac{3^n-1}{2}$ となり，$\displaystyle S = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k-1}$ とおくと，

$$\begin{array}{rrcccccccc} & S & = & 1\cdot 1 & + & 2\cdot 3 & + \cdots + & n\cdot 3^{n-1} & & \\ -) & 3S & = & & & 1\cdot 3 & + \cdots + & (n-1)\cdot 3^{n-1} & + & n\cdot 3^n \\ \hline & -2S & = & 1 & + & 3 & + \cdots + & 3^{n-1} & - & n\cdot 3^n \end{array}$$

であるので，$S = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3^n-1}{2} + \dfrac{1}{2}n\cdot 3^n = \dfrac{(2n-1)\cdot 3^n + 1}{4}$ が得られる．以上より

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3^n-1}{2} - 4\cdot\frac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{4} = \boldsymbol{\frac{(3-4n)3^n-3}{2}}$$

[II] 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) 座標平面上の原点 O，点 A(1, 0)，点 B(1, 1)，点 C(0, 1) を頂点とする正方形 OABC を原点 O を中心に $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ だけ回転させたものを正方形 OA′B′C′ とする。

直線 $y=k$ によって正方形 OA′B′C′ が面積が等しい 2 つの部分に分かれたとする。

このとき，直線 $y=k$ が正方形 OA′B′C′ によって切り取られてできる線分の長さを k を用いずに θ を用いて表すと $\boxed{(1)}$ である。また，k の値を θ を用いて表すと $\boxed{(2)}$ である。

(ii) 5 個の値 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 からなるデータの平均値を $\overline{x}$，分散を v，中央値を M としたとき $M>0$，

$\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(x_i-M)^2=v+36$,　$\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{5}{x_i}^2-M^2=v+96$ が成り立つとする。

このとき，$\overline{x}-M=\boxed{(3)}$ である。また，x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を並べ替えると公比が -1 より小さい等比数列となるとき，データに含まれる値の最小値は $\boxed{(4)}$ となる。

解答

(1) $\dfrac{1}{\cos\theta}$　(2) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2}$　(3) 6　(4) -40

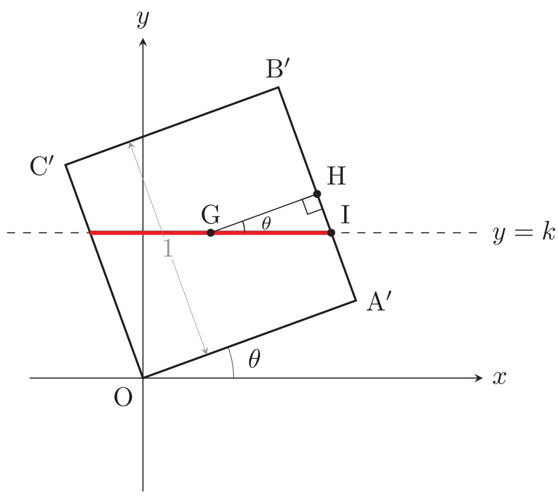
解説

(i) 直線 $y=k$ によって正方形 OA′B′C′ が面積の等しい 2 つの部分に分かれるのは直線 $y=k$ が正方形の中心を通るときである．

正方形 OA′B′C′ の中心を G とし，G から辺 A′B′ に下した垂線と辺 A′B′ との交点を H，直線 $y=k$ と辺 A′B′ との交点を I とすると，線分 GH は辺 OA′ に平行であることから $\angle\mathrm{IGH}=\theta$ となるので，直線 $y=k$ が正方形 OA′B′C′ によって切り取られてできる線分の長さは

$$2\mathrm{GI}=2\cdot\frac{\mathrm{GH}}{\cos\theta}=\boldsymbol{\frac{1}{\cos\theta}}$$

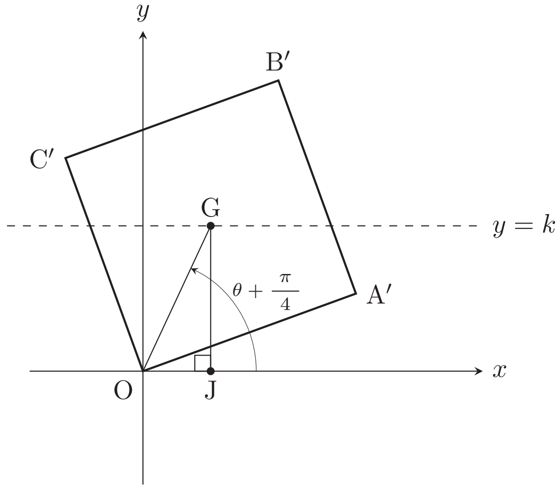
である．



また，正方形 OA′B′C′ の対角線の長さは $\sqrt{2}$ なので $\mathrm{OG}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり，線分 OG と x 軸のなす角の大きさは $\theta+\dfrac{\pi}{4}$ であるから，G の y 座標すなわち k の値は

$$\begin{aligned}k&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}\end{aligned}$$

である．



別解

$A'(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である．点 C' は点 A' を原点 O の周りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた点であるから，複素数平面において，$A'(\alpha)$，$C'(\gamma)$ とすると，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ より，

$$\gamma=i(\cos\theta+i\sin\theta)=-\sin\theta+i\cos\theta$$

となる．これより座標平面では $C'(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ となる．したがって，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC'}}{2}=\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2},\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)$$

となるので $k=\boldsymbol{\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}$ である．

(ii) (3)

$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-M)^2=v+36\cdots①,\quad \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}{x_i}^2-M^2=v+96\cdots②$$

とする．$\overline{x}-M=d$ とすると

$$\begin{aligned}(①の左辺)&=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-M)^2\\&=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\{(x_i-\overline{x})+(\overline{x}-M)\}^2\\&=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2+2(\overline{x}-M)\cdot\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})+(\overline{x}-M)^2\\&=v+0+d^2\end{aligned}$$

① よりこれが $v+36$ に等しいので，$d^2=36$ より $d=\pm6$ である．

また，$\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{5}{x_i}^2-\overline{x}^2=v$ が成り立つから，これと② を辺々引いて

$$\overline{x}^2-M^2=96\iff(\overline{x}+M)(\overline{x}-M)=96\iff(\overline{x}+M)d=96$$

となる．$d=\overline{x}-M=\pm6$ なので $\overline{x}+M=\pm16$（複号同順）となり，これより $M=\pm5$ となるが，与条件より $M>0$ なので $M=5$ である．したがって $d=\overline{x}-M=\boldsymbol{6}$ がわかる．また $\overline{x}=11$ もわかる．

(4) 題意の等比数列の公比を $r\ (<-1)$，初項を a とおく．その 5 項は

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4$$

となる．$M>0$ より $a\fallingdotseq0$ である．$r<-1$ より $r^3<r<-1,\ 1<r^2<r^4$ であるから，$a>0$ のとき小さい順に並べると

$$ar^3,\ ar,\ a,\ ar^2,\ ar^4$$

となる．また $a<0$ のときは大小が逆転するだけなので，いずれにしても a が中央値，つまり $a=M=5$ である．したがって $a>0$ なのでデータの最小値は ar^3 である．各項の平均が $\overline{x}=11$ であることから

$$\begin{aligned}&\frac{5+5r+5r^2+5r^3+5r^4}{5}=11\\&\iff r^4+r^3+r^2+r-10=0\\&\iff(r+2)(r^3-r^2+3r-5)=0\end{aligned}$$

を得る．$r<-1$ なので $r^3-r^2+3r-5<0$ であるから，$r=-2$ である．したがって，データに含まれる値の最小値は $ar^3=Mr^3=5(-2)^3=\boldsymbol{-40}$ である．

[III] （記述問題）

曲線 $C : y = \dfrac{4x-4}{x^2+1}$ $(x>0)$ について，次の問に答えよ。

(i) 曲線 C には 2 つの変曲点がある。この 2 つの変曲点を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。

(ii) 曲線 C と直線 ℓ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

必要ならば $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{5}{12}\pi = 2+\sqrt{3}$ を用いよ。

解答

(i) 導関数は

$$\begin{aligned} y' &= 4\cdot\frac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

となり，第 2 次導関数は

$$\begin{aligned} y'' &= 4\cdot\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-(-x^2+2x+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= 4\cdot\frac{(x^2+1)\{(-2x+2)(x^2+1)-4x(-x^2+2x+1)\}}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{8\{(1-x)(x^2+1)-2x(-x^2+2x+1)\}}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{8\{(x^2+1)+x(x^2-4x-3)\}}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{8(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{8(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

となるので，増減・凹凸は以下の通りとなる．

x	(0)	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	(-4)	⤴	$-1-\sqrt{3}$	⤴		⤵	$-1+\sqrt{3}$	⤵

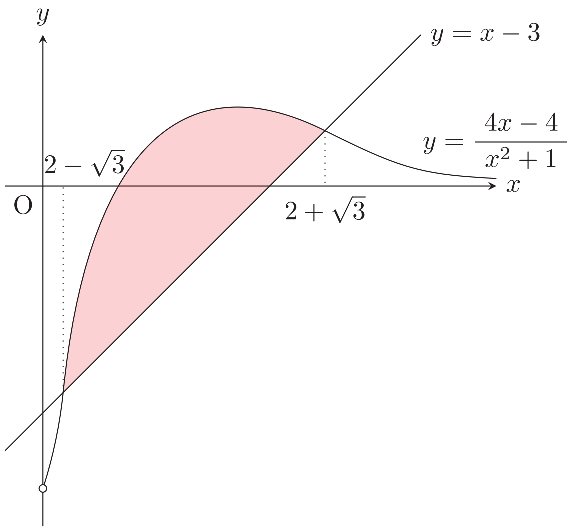
変曲点の座標は $(2-\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3})$, $(2+\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3})$ である．よって，この 2 つの変曲点を通る直線 ℓ の方程式は，$\boldsymbol{y=x-3}$ である．

(ii) 曲線 $C : y = \dfrac{4x-4}{x^2+1}$ $(x>0)$ と直線 $\ell : y = x-3$ との交点の x 座標は，

$$\begin{aligned} &\frac{4x-4}{x^2+1} = x-3 \iff (x-3)(x^2+1) = 4x-4 \\ &\iff x^3-3x^2-3x+1 = 0 \iff (x+1)(x^2-4x+1) = 0 \end{aligned}$$

より，$x = 2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$ のみである（先の増減・凹凸と ℓ の y 切片が曲線より上であることからも明らかである）．

$2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$ において $y'' < 0$ なのでこの区間で曲線 C は上に凸だから，曲線 C は直線 ℓ より上にある．



よって，求める面積を S とおくと，

$$\begin{aligned}
S &= \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left\{ \frac{4x-4}{x^2+1} - (x-3) \right\} dx \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(\frac{4x}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+1} - x + 3 \right) dx \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(\frac{4x}{x^2+1} - x + 3 \right) dx - 4\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\, dx
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
&\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(\frac{4x}{x^2+1} - x + 3 \right) dx \\
&= \left[2\log|x^2+1| - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \\
&= 2\log\frac{4(2+\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \\
&= 4\log(2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

である．また $\displaystyle\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ は，$x=\tan\theta$ と置換すると，

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 2-\sqrt{3} & \to & 2+\sqrt{3} \\ \hline \theta & \dfrac{\pi}{12} & \to & \dfrac{5}{12}\pi \end{array}$$

より，

$$\begin{aligned}
&\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi} 1\, d\theta \\
&= \frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

である．以上より，$S = \mathbf{4\log(2+\sqrt{3})+2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}$ である．

注釈

この問題Ⅲとの類似性が強い問題が，以下のように，本学の過去の推薦入試で出題されている．使われている関数が同じであり，変曲点が絡んでいる点や積分の際の計算過程が非常に似通っている．

【2019 年度福岡大学医学部推薦入試　問題Ⅱ】

関数 $f(x) = \dfrac{4(x-1)}{x^2+1}$ について，次の問いに答えよ．

(i)　$y = f(x)$ の変曲点をすべて求めよ．

(ii)　変曲点の x 座標を小さい順に並べ，最初の 2 つを α，β $(\alpha < \beta)$ とする．このとき，$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ．必要なら $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ を用いよ．

予想配点

［**I**］　42 点　(i) $7+7$　(ii) $7+7$　(iii) $7+7$

［**II**］　28 点　(i) $7+7$　(ii) $7+7$

［**III**］　30 点　(i) 15　(ii) 15

講評

［I］ ［小問集合］(i) やや易 (ii) 標準 (iii) 標準

(i) 三角関数の 3 倍角の公式を用いる基本問題．ここは正解がほしい．

(ii) 空間座標の問題．前半の結果を利用出来たかどうかで作業量に大きく差が出る．

(iii) 数列の和から一般項を求める問題．手順は非常に典型的だが，負号が含まれるので混乱しやすい．

［II］ ［小問集合］ (i) 標準 (ii) やや難

(i) 正方形を 1 つの頂点を中心として回転移動させる問題であった．この手のタイプは解いた経験があるかないかで差がついただろう．

(ii) 5 つのデータ x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 の中央値と分散に関する問題であった．分散の計算方法や性質についてきちんと把握しておく必要があった．(4) は難しいだろう．

［III］［数学IIIの微積分］（標準）

本学で頻出の，関数のグラフと求積について考える問題であった．指数関数・対数関数が題材となることが多いのだが，今回は有理関数であった．

(i) 第 2 次導関数を丁寧に計算して，変曲点の座標を正しく求めたい．

(ii) $\dfrac{4x-4}{x^2+1}$ の定積分を計算できるかどうかがポイントである．$\dfrac{4x}{x^2+1}$ と $\dfrac{4}{x^2+1}$ に分けて考えることができるかどうかが鍵になる．

昨年に比べ少々難化した．[I] は比較的解きやすい問題が多いが，(4)(6) がやや難しい．[II] では (i) はとりたいが，(ii) は難しく正解者は少ないだろう．[III] は計算主体である．(i) は完答し，(ii) では面積の立式，および積分計算の方針までは合わせたい．

目標は 65% .

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ