

久留米大学医学部〈数学〉



点列に関する出題

3. xy 平面の原点を O とする。 O から x 軸の正方向に 1 だけ進んだ点 $(1, 0)$ を P_1 とする。そこから進行方向を反時計回りに 120° 変え、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ だけ進んだ点を P_2 とする。さらに進行方向を反時計回りに 120° 変え、 $\frac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_3 とする。同様に、 P_1, P_2, \dots, P_n を 120° ずつ反時計回りに進行方向を変え、進む長さを前回の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍にして得られる点とすると、次の問いに答えよ。

(1) P_2 の座標は $\left(\frac{二}{四} - \frac{\sqrt{三}}{四}, \frac{\sqrt{三}}{四} \right)$ 、
 P_3 の座標は $\left(\frac{ノ}{四} - \frac{\sqrt{ハ}}{四}, \frac{\sqrt{ヒ}}{四} - \frac{\sqrt{フ}}{四} \right)$ である。

(2) 点 P_n は n を大きくすると、ある点 P_∞ に近づく。 P_∞ の座標は $\left(\frac{ヘ}{四} - \frac{\sqrt{マ}}{四}, \frac{ミ}{四} - \frac{\sqrt{ム}}{四} - \frac{メ}{四} \sqrt{\frac{モ}{四}} \right)$ である。

(3) 三角形 $P_1P_2P_3$ が直角三角形となるのは、 $n = \frac{ヤ}{}$ のときである。

(2) z_n は α を用いて次のように表される。

$$z_n = (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1})z_1$$

$$= \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \dots \textcircled{1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ であることから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ が成り立つので、 $\textcircled{1}$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{1 - \alpha}$$

$$= \frac{1}{(4 + \sqrt{2}) - \sqrt{6}i}$$

$$= \frac{(10 - \sqrt{2}) + (3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})i}{14}$$

設問が同じ！

同じ設定！

【メビオ 久留米大学医学部後期直前テキスト・後期攻略講座】

2025年3月5日実施

問題 2-1-4 複素数平面上で、複素数 z_n によって点 $P_n(z_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を定義する。 $z_0 = 0, z_1 = 1$ とし、また $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、ベクトル $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を $\frac{\pi}{6}$ だけ回転して大きさを $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍すると $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$ になるものとするとき、以下の問いに答えよ。

(1) z_6 を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ を求めよ。

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} \text{ とする。}$$

(1) $z_6 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^5 = \frac{1 - \alpha^6}{1 - \alpha} = \frac{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6}{1 - \frac{3 + \sqrt{3}i}{6}} = \frac{14}{27}(3 + \sqrt{3}i)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}i)$

計算方法が同じ！

コメント

久留米大学医学部後期入試において、点列の問題が出題されました。複素数を利用すること、問題設定、極限を求める計算方法については数値が違っただけでほぼ同じでした。

メビオ生と攻略講座を受講した受験生は、入試 3 日前にこの問題をやっているのので、大いにアドバンテージを得ることができたと思います。

試験直前に
演習！