2025 年 3 月 10 日実施

ズバリ的中

医学部進学予備校 メビオ

大阪医科薬科大学〈数学〉

双曲線のパラメータ表示に関する出題

〔3〕 座標平面上に曲線 $C : y = \sqrt{x^2-4}$ $(x \geqq 2)$ がある。点 $(1,\ 0)$ を通る C の接線を l とし，次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。また，l と曲線 C の接点の座標を求めよ。

(2) t を 0 以上の実数とする。曲線 C と直線 $x = e^t + e^{-t}$ の共有点の y 座標を t を用いて表せ。

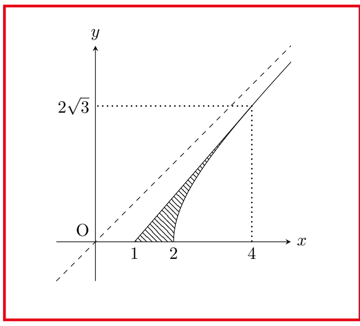
(3) 直線 l，曲線 C および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

（解答の一部です）

題意の領域は図の斜線部であり，その面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\cdot(4-1)\cdot 2\sqrt{3} - \int_2^4 y dx$$

$$= 3\sqrt{3} - \int_2^4 y dx \cdots ①$$



$\int_2^4 y dx$ について，$y = \sqrt{x^2-4}$ 上の点は (2) の結果より

$$\begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} \end{cases}$$

と表すことができるので，$x = e^t + e^{-t}$ と置換すると，

$$\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t},\quad \begin{array}{c|c} x & 2 \to 4 \\ \hline t & 0 \to \log(2+\sqrt{3}) \end{array}$$

であることから，

$$\int_2^4 y dx = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t}) dt$$

$$= \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} (e^{2t} + e^{-2t} - 2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t\right]_0^{\log(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{7+4\sqrt{3}}{2} - \frac{7-4\sqrt{3}}{2} - 2\log(2+\sqrt{3})$$

$$= 4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3})$$

を得る．これを①に代入することにより，

$$S = 3\sqrt{3} - \{4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3})\}$$

$$= \mathbf{2\log(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}}$$

領域もほぼ同じ！

方針も一致！

同じ形式のパラメータ

【メビオ 大阪医科薬科大学対策テキスト･攻略講座】 2025年2月実施

曲線 C が媒介変数 t を用いて，次の式で与えられている．

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2},\quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

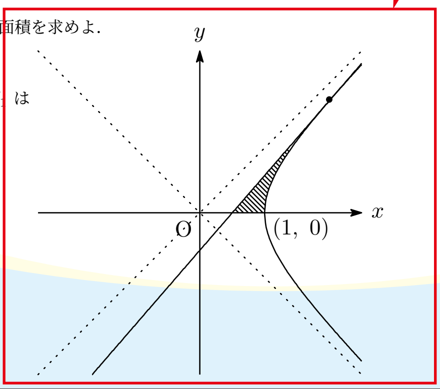
(1) 点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ を通る曲線 C の接線のうち，傾きが正のものの方程式を求めよ．そのとき，接点に対応する t の値を求めよ．

(2) この接線と，曲線 C および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

（解答の一部です）

接線，x 軸，接点から下ろした垂線の作る三角形の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



C，x 軸，接点から下ろした垂線の作る図形の面積 S_2 は

$$S_2 = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} \frac{e^t - e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t - e^{-t}}{2} dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} - 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{\log(2+\sqrt{3})} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

従って面積 S は

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

計算結果も
４倍となっただけ

コメント

大阪医科薬科大学の後期入試本番で、双曲線のパラメータ表示に関する問題が的中しました。メビオで実施した「大阪医科薬科大学対策授業」、「大阪医科薬科大学攻略講座」では、同じ題材で同様の接線や囲まれる部分の面積を求める演習を行いました。本番では、まさにその授業で扱った問題と同様の「接線の方程式」や「パラメータを用いて積分計算を行う求積問題」が出題されました。この問題は直接積分計算を行うことは難しく、パラメータを用いて置換積分をする必要があるため経験していないと実際の計算でつまづく受験生が多いタイプの問題でした。攻略講座を受講していた生徒やメビオ生は同様の問題を解いた経験があったため、試験本番では確実にアドバンテージを得ることができました。

試験直前に
演習！

※試験問題、模試問題とも掲載用にレイアウトを多少変更しています